

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UM ELEMENTO FINITO DE CASCA PARA A ANÁLISE DE PROBLEMAS
COM NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

ROGÉRIO PIMENTA MOURÃO

FLORIANÓPOLIS, NOVEMBRO DE 1991

UM ELEMENTO FINITO DE CASCA PARA A ANÁLISE DE PROBLEMAS
COM NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

ROGÉRIO PIMENTA MOURÃO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO, APROVADA
EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA



CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE - Ph.D.
ORIENTADOR



BEREND SNOEIJER - Dr.-Ing.
COORDENADOR DO CURSO

BANCA EXAMINADORA:



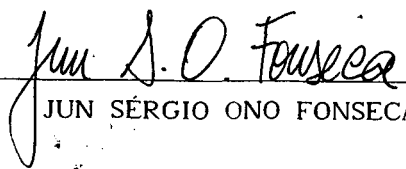
CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE - Ph.D.
PRESIDENTE



DOMINGOS BOECHAT ALVES - D.Sc.



CLOVIS SPERB DE BARCELLOS - Ph.D.



JUN SÉRGIO ONO FONSECA - M.Sc.

AGRADECIMENTOS

A CAPES, pelo apoio financeiro;

ao prof. Carlos Alberto de Campos Selke, pela orientação deste trabalho;

ao colega Jun, em especial, pelas incontáveis informações e dicas e ao Ipira, pelo programa gráfico;

aos colegas do GRANTE.

INDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Histórico e pesquisa bibliográfica	1
1.2	Definição do tema da dissertação	3
2	ABORDAGEM NÃO LINEAR DA MECÂNICA DO CONTÍNUO	4
2.1	Formulação lagrangiana atualizada	4
2.2	Tensões e deformações	5
2.3	Equações de equilíbrio incrementais	8
3	FORMULAÇÃO DO ELEMENTO	10
3.1	Sistemas de coordenadas	10
3.2	Discretização da geometria e do campo de deslocamentos	15
3.3	Discretização da equação de equilíbrio incremental	17
4	ELIMINAÇÃO DO TRAVAMENTO ("LOCKING") E ESTABILIZAÇÃO DOS MODOS ESPÚRIOS	21
4.1	Subintegração e modos de energia zero	21
4.2	Estabilização dos modos espúrios	21
4.2.1	Obtenção do operador	25
4.2.2	Construção da matriz de estabilização	25
4.2.3	Contribuição das forças de estabilização ao vetor resíduo	30
5	EXEMPLOS NUMÉRICOS	31
5.1	Análise linear	32
5.1.1	"Patch test"	32
5.1.2	Placas	36
5.1.2.1	Placa quadrada	36
5.1.2.2	Placa circular engastada	39
5.1.3	Cascas	42
5.2	Análise não linear	47
5.2.1	Placa engastada submetida a flexão pura	47
5.2.2	Viga simplesmente apoiada com carregamento de flexão	50
5.2.3	Cilindro puncionado	53

5.2.4 Flexão não linear de um tubo	55
6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	58
6.1 Conclusões	58
6.2 Recomendações	60

ANEXO

BIBLIOGRAFIA

SIMBOLOGIA

1- LETRAS LATINAS

- a_p - espessura do elemento no nó p ;
- \bar{b} - força de corpo prescrita;
- B_L - matriz deformação-deslocamento linear;
- B_G - matriz deformação-deslocamento não linear;
- B^γ - matriz deformação-deslocamento de estabilização;
- d - graus de liberdade globais de translação;
- d' - graus de liberdade locais de translação;
- D - rigidez de flexão;
- D - matriz de propriedades materiais;
- D^γ - matriz de coeficientes de estabilização;
- e - vetores de base do sistema global;
- e' - vetores de base do sistema nodal;
- \hat{e} - vetores de base do sistema local;
- E - módulo de elasticidade;
- f^γ - forças de estabilização;
- F - tensor gradiente de deformação;
- nF - vetor de reações internas na configuração $\Omega^{(n)}$;
- G - módulo de elasticidade transversal;
- G, H, R, S, T, V - matrizes de mudança de base;
- h - vetor de modos espúrios;
- h - espessura;
- I - momento de inércia;
- I - matriz identidade;
- J - determinante da matriz jacobiana em coordenadas globais;
- J' - determinante da matriz jacobiana em coordenadas locais;

k - fator de correção para distribuição das tensões cisalhantes;
 K_L - matriz de rigidez linear;
 K_G - matriz de rigidez geométrica;
 K^γ - matriz de estabilização;
 l_i, m_i, n_i - cossenos diretores;
 n - normal unitária à superfície do domínio;
 N_p - função de interpolação do nó p ;
 $P^{(n)}$ - ponto genérico do domínio de interesse, na configuração $\Omega^{(n)}$;
 q - carregamento distribuído;
 r, s, t - coordenadas naturais;
 nR - vetor carregamento na configuração $\Omega^{(n)}$;
 S - fronteira do domínio de interesse;
 S - segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff;
 s - vetor da base ortogonal para construção do operador de estabilização;
 \bar{t} - tração superficial prescrita;
 u - deslocamentos globais;
 U'_p - vetor deslocamento da normal ao nó p ;
 U - energia de deformação;
 V - porção do domínio de interesse;
 0x - coordenadas da configuração inicial;
 1x - coordenadas no sistema global de um ponto em uma configuração conhecida;
 2x - coordenadas no sistema global de um ponto em uma configuração a determinar;
 \hat{x} - coordenadas no sistema nodal;
 x' - coordenadas no sistema local;
 W_I - trabalho virtual interno;
 W_E - trabalho virtual externo;
 Z - normal nodal unitária.

2- LETRAS GREGAS

- α, β - pontos de integração numérica;
- δ - variação de uma grandeza;
- γ - operador de estabilização;
- Δd - vetor de graus de liberdade globais;
- $\Delta d'$ - vetor de graus de liberdade locais;
- $\Delta \epsilon$ - tensor incremento de deformação de Green-Lagrange;
- $\Delta \epsilon^\gamma$ - incremento de deformação de estabilização;
- Δe - incremento linear de deformação em coordenadas globais;
- Δe - incremento linear de deformação em coordenada locais;
- $\Delta e'$ - incremento linear de deformação em coordenadas locais;
- $\Delta \eta$ - incremento não linear de deformação;
- ΔS - incremento do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff;
- Δu - incremento de deslocamento em coordenadas globais;
- $\Delta u'$ - incremento de deslocamento em coordenadas locais;
- $\Delta \sigma^\gamma$ - incremento de tensão de estabilização;
- ϵ - tensor deformação de Green-Lagrange;
- ϵ^γ - deformação generalizada de estabilização;
- μ - curvatura;
- ν - coeficiente de Poisson;
- ρ - massa específica;
- σ - tensor tensão de Cauchy;
- σ^γ - tensão generalizada de estabilização.
- Ω - configuração de um dado domínio de interesse.

RESUMO

Neste trabalho é desenvolvido um elemento finito de casca adequado ao estudo de problemas não lineares envolvendo grandes rotações e deslocamentos.

Foi escolhido um elemento finito isoparamétrico biquadrático de 9 nós baseado no Princípio dos Trabalhos Virtuais. A excessiva rigidez à flexão inerente a este elemento é eliminada pela subintegração das matrizes de rigidez e os modos espúrios de energia zero daí decorrentes são estabilizados pela introdução de um operador matemático especialmente construído.

Para verificar a eficiência e a versatilidade do elemento implementado, foram estudados casos de placas, tiras, vigas e cascas. Os resultados mostram bom desempenho do elemento, confirmando a robustez de sua formulação.

ABSTRACT

In this work a shell finite element for the study of nonlinear problems undergoing large rotations and displacements is developed.

For this purpose, a displacement-based nine-node biquadratic isoparametric element was selected. The excessive stiffness inherent to this element is avoided by the subintegration of the stiffness matrices, and the resulting spurious zero energy modes are stabilized by the introduction of a mathematical operator specially constructed.

The results show a good performance of the element, proving the robustness of its formulation.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

As estruturas de cascas têm uma ampla gama de aplicações industriais. Projetistas das áreas nuclear, aeroespacial e petroquímica, entre outras, estão constantemente envolvidos no cálculo de componentes como vasos de pressão, silos, asas de aeronaves, trocadores de calor, compressores, etc, onde preponderam elementos tipo casca. Não raro, algumas destas estruturas terão ainda de utilizar em seu dimensionamento teorias que usam hipóteses de cálculo prevendo grandes deslocamentos ou rotações, casos em que a Elasticidade Linear fornece resultados imprecisos ou mesmo completamente incorretos.

Neste trabalho, desenvolve-se um elemento finito biquadrático degenerado isoparamétrico de 9 nós para problemas de não linearidade geométrica. Para evitar a excessiva rigidez à flexão inerente a este elemento, ou seja, o travamento ("locking"), usa-se o método da subintegração e, para eliminação dos modos falsos de deformação decorrentes, faz-se sua estabilização por meio de um operador matemático especialmente construído.

1.1 Histórico e pesquisa bibliográfica

As equações básicas que descrevem o comportamento de cascas elásticas foram obtidas de forma sistematizada inicialmente por Love [25,26], no final do século passado. Os postulados nos quais se baseou a teoria de Love, também conhecida como primeira aproximação de Love, preconizam que:

- a casca é fina, ou seja, sua espessura é muito pequena em comparação com seu menor raio de curvatura;
- as deflexões são pequenas, de ordem de grandeza inferior à espessura;
- as tensões normais transversais não são consideradas;
- as normais à superfície média se mantêm normais e inextensíveis durante a deformação.

A partir destes estudos, foram desenvolvidos trabalhos que resultaram em teori-

as de cascas nas quais um ou mais dos postulados anteriores são abandonados. Neste contexto, a teoria de Flügge-Lur'e-Byrne, desenvolvida independentemente por estes autores, relaxou a hipótese de que a casca era fina, retendo na relação deformação-deslocamento os termos h/R . **Reissner et al.** [27] propuseram uma teoria na qual os dois últimos postulados eram abandonados, permitindo a incorporação de efeitos de cisalhamento.

A utilização do método de elementos finitos no estudo do comportamento de cascas resultou inicialmente em elementos cuja formulação é baseada nas hipóteses de Love. Estes logo se mostraram limitados, por se aplicarem somente a casos de cascas finas e com cisalhamento desprezível; além disto, como as equações de equilíbrio resultantes são de quarta ordem, é requerida continuidade C^1 , o que implica funções de interpolação de maior ordem. Estes elementos podem ainda apresentar não-conformidade (descontinuidade de deslocamentos) e ausência de alguns movimentos de corpo rígido [29].

Na tentativa de superar estas limitações, desenvolveu-se o elemento degenerado, baseado nas premissas da teoria de Reissner. A geometria e o campo de deslocamentos são descritos em termos de variáveis da superfície média (coordenadas, translações e rotações), as equações de equilíbrio são equações diferenciais de segunda ordem e, conseqüentemente, sua formulação requer apenas continuidade C^0 .

A formulação de elemento finito degenerado foi apresentada pela primeira vez por **Ahmad et al** [1], que, a partir de elementos tridimensionais quadráticos e cúbicos de casca, construíram elementos de 9 e 12 nós onde, das hipóteses clássicas de Love, se conservou aquelas segundo as quais as normais à superfície média permanecem retas e as tensões normais transversais são desconsideradas.

Tais elementos, contudo, não apresentaram bons resultados para cascas finas, sendo excessivamente rígidos e com baixa taxa de convergência. Visando melhorar este comportamento, **Zienkiewicz et al.** [2] introduziram o método da integração reduzida, aplicando-o a um elemento de 8 nós.

A partir destes estudos, diversos autores contribuíram para a melhoria e popularização dos elementos degenerados de casca. **Bathe e Bolourchi** [3] desenvolveram um elemento para não linearidade geométrica e de material, aplicando-o para formulações lagrangiana atualizada e total. **Surana** [4], **Oliver e Onate** [5] e **Hsiao e Chen** [6] implementaram estratégias de atualização da geometria do elemento que permitem grandes rotações, o que possibilita o uso de relativamente poucos elementos em casos severos de não linearidade geométrica. **Milford e Schnobrich** [7] fizeram um estudo comparativo entre as estratégias de atualização baseadas em rotações incrementais e em rotações finitas, concluindo que não houve diferenças significativas entre ambas nos casos que analisaram. Visando o aspecto da economia de tempo de processamento computacional, **Zienkiewicz et al.** [2] e **Milford e Schnobrich** [7] propuseram o uso de

integração explícita das matrizes no sentido da espessura do elemento.

Dois aspectos fundamentais para o bom desempenho dos elementos de casca baseados na interpolação do campo de deslocamentos são a subintegração e o controle dos modos espúrios de energia zero. **Bicanic e Hinton [8]** estudaram os modos espúrios que se desenvolvem em elementos bidimensionais de 4, 8 e 9 nós, em malhas de um ou mais elementos. **Belytschko et al. [9-11]** desenvolveram um método de estabilização aplicável a problemas não lineares, demonstrando, através do princípio variacional de Hu-Washizu, a consistência matemática do operador construído. **Huang e Hinton [12]** e **Belytschko et al. [13]** desenvolveram um elemento de 9 nós em que os modos espúrios são eliminados via interpolação da deformação.

Diversos outros autores obtiveram elementos de cascas com eliminação de travamento e modos espúrios, como **Verhegghe e Powell [14]**, para casos bidimensionais, **Briassoulis [15]**, que estudou malhas com apenas alguns elementos estabilizados e **White e Abel [16]**, que obtiveram um elemento adequado a estudos de problemas com não linearidade geométrica e a casos de plastificação.

1.2 Definição do tema da dissertação

Tendo por base estes estudos, resolveu-se implementar um elemento de casca para problemas com não linearidade geométrica que não apresentasse como deficiência os fenômenos de travamento e modos falsos de energia zero.

Optou-se por um elemento degenerado devido a seu bom desempenho em casos de cascas finas, uma vez que, tendo apenas um nó na direção transversal, não ocorre singularidade nas matrizes de rigidez quando a espessura se torna pequena. A escolha de um elemento de 9 nós deveu-se a sua pequena sensibilidade à distorção (menor, por exemplo, do que o elemento biquadrático de 8 nós) e a opção por um elemento baseado nas premissas da teoria de Reissner foi feita para acomodar os efeitos de cisalhamento.

CAPÍTULO 2

ABORDAGEM NÃO LINEAR DA MECÂNICA DO CONTÍNUO

Neste capítulo são descritos os principais conceitos envolvidos na análise não linear de um meio contínuo. Inicialmente, apresenta-se a formulação lagrangiana incremental atualizada, abordagem adotada neste trabalho. Em seguida, definem-se as tensões, deformações e relações constitutivas empregadas e, por fim, o Princípio dos Trabalhos Virtuais, mostrando-se como, a partir dele, são obtidas as equações de equilíbrio incrementais.

2.1 Formulação lagrangiana atualizada

Uma classe de problemas de engenharia que freqüentemente se coloca em Análise Estrutural é o dimensionamento de peças e componentes utilizando teorias de elasticidade finita. Nestes casos, a teoria clássica da Elasticidade Linear não se aplica, havendo necessidade de uma abordagem mais adequada, que leve em consideração a grande variação da geometria do domínio durante o processo de deformação. Exemplos de problemas não lineares são aqueles nos quais os ângulos de rotação não podem mais ser aproximados pelos respectivos senos ou, no caso de placas e cascas, as deflexões são maiores do que a metade de sua espessura.

As abordagens existentes se classificam segundo a configuração de referência que usam para descrever os parâmetros desejados. A formulação lagrangiana utiliza as coordenadas materiais (do estado indeformado), enquanto na formulação euleriana as grandezas são medidas em coordenadas espaciais (da configuração deformada). Ambas são conceitualmente corretas mas, em Elasticidade, a formulação lagrangiana é mais conveniente, por sua maior aproximação com os aspectos físicos dos problemas envolvidos, uma vez que sempre existirá um estado indeformado bem definido para o qual o corpo retornará quando retirado o carregamento. Situação oposta ocorre, por exemplo, em Mecânica dos Fluidos, onde a formulação euleriana é preferivelmente empregada.

Na formulação lagrangiana, duas estratégias podem ser usadas na escolha da configuração onde as grandezas são medidas. Na primeira, o estado antes da aplicação do

carregamento é o de referência, tendo-se então a formulação lagrangiana total, enquanto na outra, a formulação lagrangiana incremental atualizada, uma modificação é introduzida de forma que, sendo o carregamento total aplicado por passos, a configuração de um estado intermediário já conhecido é empregada como referência para determinação do estado subsequente. A Figura 1 apresenta um esquema desta formulação, onde $\Omega^{(0)}$ e $\Omega^{(f)}$ são os estados inicial e final, $\Omega^{(1)}$ uma posição de equilíbrio intermediária conhecida e $\Omega^{(2)}$ uma configuração incrementalmente próxima, a determinar.

No presente trabalho, emprega-se a formulação lagrangiana atualizada, por apresentar termos mais simplificados nas matrizes resultantes de discretização das equações de equilíbrio.

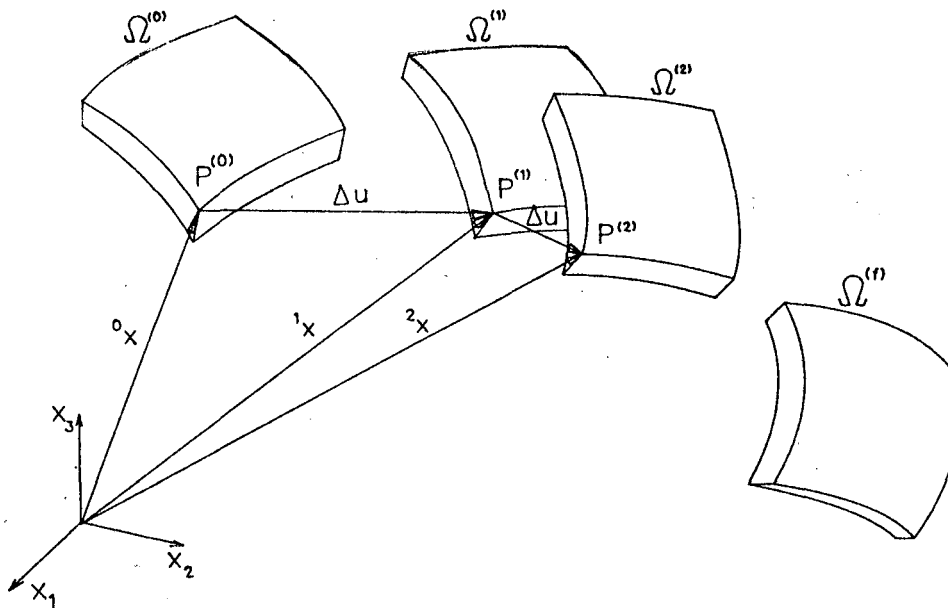


Figura 1
Esquema da formulação lagrangiana atualizada

2.2 Tensões e deformações

Na formulação lagrangiana atualizada, adotam-se algumas medidas de tensões e deformações que permitem o mapeamento entre a configuração de referência $\Omega^{(1)}$ e aquela a determinar, $\Omega^{(2)}$.

Tem-se, inicialmente, o tensor gradiente de deformação F , que incorpora as rotações e deslocamentos de corpo rígido e as deformações propriamente ditas e é definido como

$$F_{IJ} = \frac{\partial {}^2x_I}{\partial {}^1x_J} = {}^2x_{I,J}, \quad (2.1)$$

onde 1x e 2x são as coordenadas em $\Omega^{(1)}$ e $\Omega^{(2)}$, respectivamente.

Define-se em seguida o tensor deformação de Green-Lagrange ${}^2\epsilon$, medido em coordenadas do estado $\Omega^{(1)}$, tal que

$${}^2\epsilon = \frac{1}{2} (F^T F - I), \quad (2.2)$$

onde I é a matriz identidade.

Sendo o incremento de deslocamento dado por

$$\Delta u_i = {}^2x_i - {}^1x_i, \quad (2.3)$$

obtém-se, em termos de derivadas de deslocamentos, o tensor incremento de deformação de Green-Lagrange,

$$\Delta \epsilon_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\Delta u_{I,J} + \Delta u_{J,I} + \Delta u_{k,I} \Delta u_{k,J} \right), \quad (2.4)$$

onde $\Delta u_{I,J} = \frac{\partial \Delta u_I}{\partial {}^1x_J}$.

O tensor $\Delta \epsilon$ é decomposto em uma parte linear,

$$\Delta e_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\Delta u_{I,J} + \Delta u_{J,I} \right) \quad (2.5)$$

e em uma não linear,

$$\Delta \eta_{IJ} = \frac{1}{2} \Delta u_{k,I} \Delta u_{k,J}. \quad (2.6)$$

Com relação às tensões, é necessário determinar-se a tensão de Cauchy em $\Omega^{(2)}$, ${}^2\sigma$, com base nas coordenadas em $\Omega^{(1)}$. Esta atualização é feita por meio do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff, 2S , sendo a relação entre eles dada por

$${}^2S = (\det F) F^T {}^2\sigma F \quad (2.7)$$

ou

$${}^2S_{IJ} = \frac{{}^1\rho}{{}^2\rho} x_{I,m} {}^2\sigma_{mn} x_{J,n}, \quad (2.8)$$

onde ρ é a massa específica.

A tensão de Piola-Kirchhoff pode ser decomposta em

$${}^2S = {}^1\sigma + {}^2\Delta S, \quad (2.9)$$

onde ${}^1\sigma$ é a tensão de Cauchy no estado $\Omega^{(1)}$ e ${}^2\Delta S$ o incremento de tensão de Piola-Kirchhoff.

Devido à hipótese de tensões normais transversais nulas ($\sigma_{33}=0$), o tensor tensão de Cauchy é expresso por

$${}^1\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Considerando-se que os estados de equilíbrio intermediários são tomados suficientemente próximos, a seguinte relação constitutiva incremental linearizada é estabelecida:

$${}^2\Delta S_{IJ} = D_{IJKL} \Delta e_{KL}. \quad (2.11)$$

A matriz de propriedades materiais D , para materiais hookeanos isotrópicos, é dada por

$$D = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & kG & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kG \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

simétrico

onde ν é o coeficiente de Poisson, E e G os módulos de elasticidade e k o fator de correção para distribuição das tensões cisalhantes, tomado igual a $5/6$, de acordo

com a teoria de Reissner.

A definição de \mathbf{D} como uma matriz de quinta ordem pressupõe que ${}^2_1\Delta S$ e $\Delta \epsilon$ sejam arrançados na forma vetorial, como se segue:

$$\begin{aligned} {}^2_1\Delta S &= \begin{bmatrix} {}^2_1\Delta S_{11} & {}^2_1\Delta S_{22} & {}^2_1\Delta S_{12} & {}^2_1\Delta S_{23} & {}^2_1\Delta S_{13} \end{bmatrix}^T \\ \Delta \epsilon &= \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_{11} & \Delta \epsilon_{22} & \Delta \epsilon_{12} & \Delta \epsilon_{23} & \Delta \epsilon_{13} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.3 Princípio dos trabalhos virtuais incrementais

A formulação do elemento adotado se baseia no Princípio dos Trabalhos Virtuais o qual estabelece que, em um sistema conservativo em equilíbrio que satisfaça as condições de contorno essenciais, o trabalho virtual total das forças externas é igual à variação da energia interna.

Considerando-se um volume 1V pertencente a um corpo elástico e sua fronteira 1S , a equação de equilíbrio na configuração $\Omega^{(1)}$ é dada por

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + {}^1p_i \bar{b}_i = 0, \quad (2.14)$$

onde \bar{b}_i é a força de corpo prescrita.

Supondo-se que trações superficiais \bar{t} sejam prescritas em uma porção ${}^1\bar{S}$ da fronteira, a seguinte expressão é definida:

$${}^1\bar{t}_i = {}^1\sigma_{ij} n_j, \quad (2.15)$$

sendo n_j o vetor normal unitário.

Admitindo-se que os campos de deslocamentos u_i e de deformações ϵ_{ij} existam em $\Omega^{(1)}$ e se relacionem através de

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} \right), \quad (2.16)$$

e que as derivadas de deslocamentos sejam muito menores do que a unidade, o trabalho produzido pelo campo de tensões quando percorrem este campo de deformações é igual ao trabalho das forças prescritas quando percorrem o campo de deslocamentos u_i .

Levando-se em conta (2.8), (2.14) e (2.15), o trabalho virtual interno é dado por

$$\delta W_I = \int_{1V} {}^2S_{IJ} \delta \epsilon_{IJ} dV \quad (2.17)$$

e o trabalho virtual externo por

$$\delta W_E = \int_{1V} \bar{b}_i \delta u_i dS + \int_{1V} \bar{t}_i \delta u_i dS. \quad (2.18)$$

Considerando-se agora as decomposições de $\Delta \epsilon$ (Eqs. 2.5 e 2.6), a relação constitutiva incremental linearizada (Eq. 2.10) e fazendo-se a aproximação

$$\delta \epsilon_{IJ} = \delta e_{IJ},$$

obtem-se a forma fraca da equação de equilíbrio do sistema para o estado $\Omega^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \int_{1V} D_{IJKL} \Delta e_{KL} \delta e_{IJ} dV + \int_{1V} {}^1\sigma_{IJ} \Delta \eta_{IJ} dV = \\ \int_{2S} {}^2\bar{t}_i \delta u_i dS + \int_{2V} {}^2\bar{b}_i \delta u_i dV - \int_{1V} {}^1\sigma_{IJ} \delta e_{IJ} dV. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A superfície 2S e o volume 2V utilizados na integração do carregamento podem ser substituídos por valores da configuração anterior, desde que a variação da geometria seja pequena.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO DO ELEMENTO

Neste capítulo, descreve-se o elemento finito utilizado, iniciando-se pela apresentação dos sistemas de coordenadas necessários para a descrição da geometria e determinação de deslocamentos, deformações e tensões. Em seguida, é feita a discretização da geometria e do campo de deslocamentos e é obtida a equação fundamental de elementos finitos, a partir da discretização da equação do princípio dos trabalhos virtuais desenvolvida no Capítulo 2.

3.1 Sistemas de coordenadas

O elemento isoparamétrico degenerado de 9 nós originou-se de um elemento de 18 nós, onde se colapsou os nós que compartilham da mesma normal à superfície média. A Figura 2 mostra as principais características deste elemento. Para a completa descrição de sua geometria, determinação das matrizes de rigidez, vetor de carga, vetor resíduo, bem como para o cálculo do campo de deslocamentos, das deformações e tensões, são definidos quatro sistemas de coordenadas, descritos a seguir.

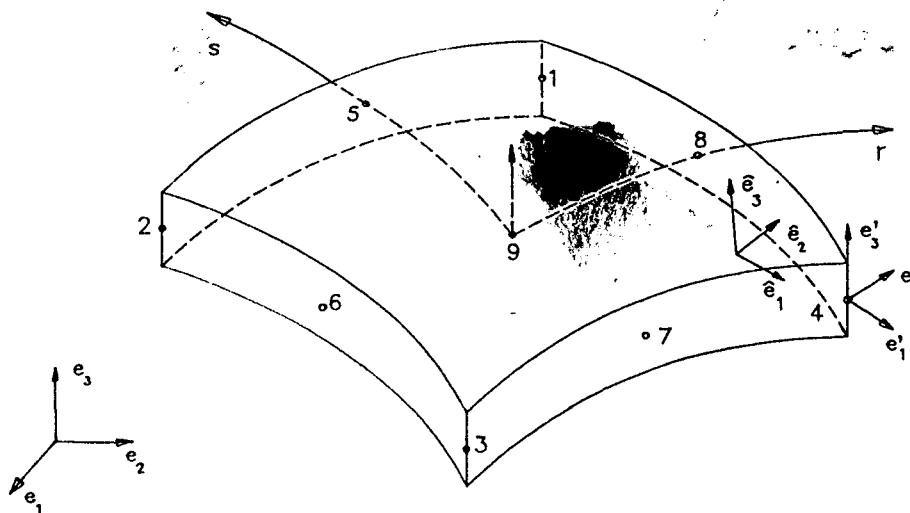


Figura 2

Elemento isoparamétrico bi-quadrático de 9 nós

Sistema global - x

É um sistema ortogonal onde são definidas as coordenadas materiais de um ponto genérico do elemento. O carregamento, a matriz de rigidez global e os deslocamentos nodais também são expressos neste sistema. Os vetores unitários são e_1 , e_2 e e_3 .

Sistema de coordenadas naturais - r,s,t

É o sistema de coordenadas curvilíneas que permite o mapeamento do domínio real para o domínio de referência do elemento, através da matriz jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} x_{1,r} & x_{2,r} & x_{3,r} \\ x_{1,s} & x_{2,s} & x_{3,s} \\ x_{1,t} & x_{2,t} & x_{3,t} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

As funções de interpolação são definidas neste sistema.

Devido à hipótese da teoria de cascas de que as normais à superfície média permanecem retilíneas durante a deformação, o eixo das coordenadas t também é retilíneo.

Os vetores de base deste sistema são definidos como se segue:

$$e_r = \frac{x_{,r}}{\|x_{,r}\|}$$

$$e_s = \frac{x_{,s}}{\|x_{,s}\|}$$

$$e_t = e_r \times e_s$$

Sistema nodal - \hat{x}

Em cada nó do elemento é definido um sistema ortogonal co-rotacional, de forma que a direção de \hat{x}_3 seja sempre coincidente com a direção da normal à superfície média neste nó. Sendo 1x_p o vetor posição do nó genérico p na configuração $\Omega^{(1)}$, os vetores $x_{p,r}$ e $x_{p,s}$ são paralelos à superfície média. Portanto, o vetor unitário \hat{e}_3 , que define a direção de \hat{x}_3 , é construído como sendo o produto vetorial

$$\hat{e}_3 = \frac{{}^1x_{p,r} \times {}^1x_{p,s}}{\| {}^1x_{p,r} \times {}^1x_{p,s} \|}$$

Os demais vetores da base nodal são

$$\hat{e}_1 = e_3 \times \hat{e}_3$$

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1$$

As rotações nodais são definidas neste sistema.

Sistema local - x'

Em cada ponto de integração do elemento é definido um sistema ortogonal corrotacional, de forma similar ao sistema nodal. Sendo e_r , e_s e e_t os vetores da base natural no ponto de integração, tem-se

$$e'_1 = e_s \times e_t,$$

$$e'_2 = e_t \times e'_1$$

$$e'_3 = e'_1 \times e'_2$$

Para facilidade de notação, os pontos de integração serão denominados pontos β neste trabalho.

As deformações, tensões e matrizes de rigidez e de propriedades materiais são definidas no sistema local. As matrizes de estabilização são obtidas em um sistema similar, construído em pontos de mesmas coordenadas r e s , porém sobre a superfície média ($t=0$). Estes pontos serão definidos como pontos α .

Transformação de coordenadas

As transformações entre os sistemas global, nodal e local são feitas através das respectivas matrizes de cossenos diretores,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.2)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix}^T .$$

Portanto,

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = R_{1j} \mathbf{x}_j \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x}'_j = S_{ij} \mathbf{x}_j .$$

Como matrizes de transformação entre sistemas ortogonais são ortogonais, tem-se ainda

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = R_{ik} S_{jk} \mathbf{x}'_j \quad (3.4)$$

$$\mathbf{x}'_j = S_{ik} R_{jk} \hat{\mathbf{x}}_j .$$

A matriz de transformação para deformações, tensões e relação constitutiva é

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} , \quad (3.5)$$

onde fez-se

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} .$$

Devido à hipótese de estado plano de tensões, as componentes de tensão no sistema local são apenas cinco; faz-se, então, a redução da matriz \mathbf{T} , eliminando-se sua terceira linha. Além disto, como a equação de equilíbrio discretizada é obtida em coordenadas locais de cada ponto de integração, é necessário fazer-se a

transformação entre os vetores de graus de liberdade locais e globais.

Os graus de liberdade globais de cada nó são cinco: três translações segundo os eixos globais e duas rotações, em torno de \hat{e}_1 e \hat{e}_2 . Os graus de liberdade locais são em número de seis por nó: três devidos à translação do nó e três originários da rotação da normal ao nó. Sendo o vetor dos graus de liberdade globais definido como

$$\Delta d = \left[\begin{array}{cccccc} \vdots & d_{1p} & d_{2p} & d_{3p} & \theta_{1p} & \theta_{2p} & \vdots \end{array} \right]^T \quad (3.6)$$

(nó p)

e o vetor dos graus de liberdade locais, no ponto de integração α ,

$$\Delta d' = \left[\begin{array}{ccccccc} \vdots & d'_{1p} & d'_{2p} & d'_{3p} & U'_{1p} & U'_{2p} & U'_{3p} & \vdots \end{array} \right]^T, \quad (3.7)$$

(nó p)

a transformação entre eles é

$$\Delta d' = Q \Delta d, \quad (3.8)$$

A matriz Q acima é formada de nove blocos semelhantes, dispostos diagonalmente. A expressão de cada bloco é

$$q_i = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & & & \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & & 0 & \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & & & \\ & & & V_{11} & V_{12} & \\ & 0 & & V_{11} & V_{12} & \\ & & & V_{11} & V_{12} & \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

onde $i=1,9$, S_{ij} é definido em (3.2) e

$$V = G H.$$

A matriz G é expressa por

$$G = R S,$$

sendo R definido também em 3.2, e a matriz H é

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz Q é usada ainda na mudança de base para as matrizes deformação-deslocamento e para a matriz de rigidez.

3.2 Discretização da geometria e do campo de deslocamentos

A posição de qualquer ponto de um elemento de casca é dada pela soma de dois vetores: o vetor posição de sua projeção sobre a superfície média e o vetor que determina a posição do ponto com relação a esta superfície.

Considerando-se o estado de equilíbrio $\Omega^{(1)}$, a geometria do elemento, após a discretização, é expressa por

$${}^1x = N_p {}^1x_p + \frac{h_p}{2} t N_p {}^1Z_p, \quad (3.10)$$

onde N_p é a função de interpolação do nó p ,

1x_p o vetor posição no nó p ,

h_p a espessura do elemento no nó p ,

t a distância do ponto à superfície média

e 1Z_p a normal unitária à superfície média no nó p .

As funções de interpolação empregadas e suas derivadas são apresentadas na Tabela 1.

Nó	N_p	$N_{p,r}$	$N_{p,s}$
1	$\frac{rs}{4} (1+r)(1+s)$	$\frac{s}{4} (1+2r)(1+s)$	$\frac{r}{4} (1+r)(1+2s)$
2	$\frac{rs}{4} (r-1)(1+s)$	$\frac{s}{4} (2r-1)(1+s)$	$\frac{r}{4} (r-1)(1+2s)$
3	$\frac{rs}{4} (1-r)(1-s)$	$\frac{s}{4} (1-2r)(1-s)$	$\frac{r}{4} (1-r)(1-2s)$
4	$\frac{rs}{4} (1+r)(s-1)$	$\frac{s}{4} (1+2r)(s-1)$	$\frac{r}{4} (1+r)(2s-1)$
5	$-\frac{s}{2} (1-r^2)(1+s)$	$-rs(1+s)$	$(1-r^2)\left(\frac{1}{2} + s\right)$
6	$\frac{r}{2} (r-1)(1-s^2)$	$\left(r - \frac{1}{2}\right)(1-s^2)$	$rs(1-r)$
7	$-\frac{s}{2} (1-r^2)(s-1)$	$rs(1-s)$	$(1-r^2)\left(s - \frac{1}{2}\right)$
8	$\frac{r}{2} (1+r)(1-s^2)$	$\left(\frac{1}{2} + r\right)(1-s^2)$	$-rs(1+r)$
9	$(1-r^2)(1-s^2)$	$-2r(1-s^2)$	$-2s(1-r^2)$

Tabela 1

Funções de interpolação e derivadas p/ o elemento de 9 nós biquadrático

Sendo o elemento isoparamétrico, o campo de deslocamentos é discretizado através das mesmas funções de interpolação. O incremento de deslocamento é então representado por

$$\Delta u = N_p d_p + \frac{h_p}{2} t N_p U'_p, \quad (3.11)$$

sendo d_p os graus de liberdade de translação e U'_p o vetor deslocamento de N_p devido às rotações θ_{1p} e θ_{2p} (Figura 3). No tratamento das rotações, empregou-se a estratégia sugerida por Surana [4], que permite grandes rotações entre dois estados de equilíbrio. Como rotações não são grandezas comutativas, diferentes resultados serão obtidos segundo a seqüência em que são consideradas. Tomando-se a seqüência $\theta_1 \rightarrow \theta_2$, o vetor que define a posição da normal atualizada com relação à normal anterior é dado por

$$U'_p = [\cos\theta_1 \sin\theta_2, -\sin\theta_1 \cos\theta_2, \cos\theta_1 \cos\theta_2 - 1]. \quad (3.12)$$

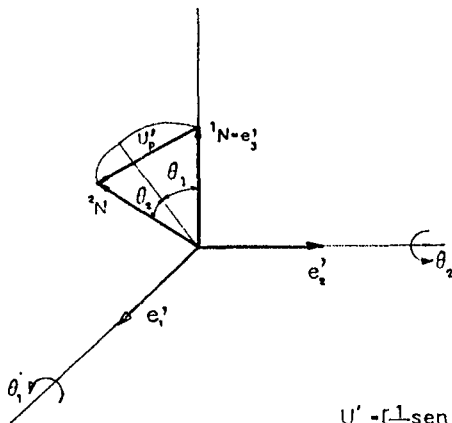
Por outro lado, sendo a sequência $\theta_2 \rightarrow \theta_1$, tem-se

$$U'_p = [\sin\theta_2, -\sin\theta_1 \cos\theta_2, \cos\theta_1 \cos\theta_2 - 1]. \quad (3.13)$$

Surana considera, então, a média entre estes vetores, fazendo

$$U_p = \left[\frac{1}{2} \sin\theta_2 (1 + \cos\theta_1), -\frac{1}{2} \sin\theta_1 (1 + \cos\theta_2), \cos\theta_1 \cos\theta_2 - 1 \right], \quad (3.14)$$

ressalvando que em casos onde se tem apenas rotações θ_1 ou θ_2 , deve-se empregar as eqs. (3.12) ou (3.13), respectivamente.



$$U'_p = \left[\frac{1}{2} \sin\theta_1 (1 + \cos\theta_2), -\frac{1}{2} \sin\theta_2 (1 + \cos\theta_1), \cos\theta_1 \cos\theta_2 - 1 \right]$$

Figura 3

Atualização do vetor normal aos nós

Sendo o elemento escolhido de classe C^0 , a continuidade da curvatura entre elementos não é garantida, o que pode levar a imprecisões em alguns casos mais desfavoráveis (casca helicoidais, grandes variações de curvaturas, etc). Faz-se, então, uma média entre as normais dos elementos que compartilham de um nó, conforme sugerido por Belytschko et al. [13].

3.3 Discretização da equação do princípio dos trabalhos virtuais incrementais

A discretização da equação do princípio dos trabalhos virtuais incrementais é feita introduzindo-se em (2.14) a expressão discretizada para o deslocamento incremental (3.11) e dividindo-se o domínio V em E elementos tal que

$$V = \bigcup_{e=1}^E V^e.$$

Na configuração de equilíbrio $\Omega^{(2)}$, a equação de equilíbrio linearizada discretizada resulta em

$$({}^1K_L + {}^1K_G) \Delta d = {}^2R - {}^2F, \quad (3.15)$$

sendo seus termos detalhados a seguir.

A matriz de rigidez linear global 1K_L é obtida pela superposição das matrizes de rigidez elementares,

$${}^1K_L^e = \int_{I_V} {}^1B_L^T D {}^1B_L dV, \quad (3.16)$$

sendo a integral avaliada numericamente utilizando a quadratura de Gauss.

A matriz deformação-deslocamento linear 1B_L é definida em coordenadas locais de cada ponto de integração, sendo obtida através da discretização da parte linear do incremento de deformação:

$${}^1\Delta e' = {}^1B_L \Delta d. \quad (3.17)$$

Sua expressão é

$${}^1B_L = \begin{bmatrix} N_{p,1} & 0 & 0 & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{p,2} & 0 & 0 & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,2} & 0 \\ N_{p,2} & N_{p,1} & 0 & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,2} & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,1} & 0 \\ 0 & N_{p,3} & N_{p,2} & 0 & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,3} & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,2} \\ N_{p,3} & 0 & N_{p,1} & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,3} & 0 & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,1} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

(nó p)

$$\text{onde } ()_{,1} = \frac{\partial ()}{\partial {}^1x'_1}.$$

A matriz de propriedades materiais D é explicitada em (2.12).

A montagem da matriz de rigidez geométrica global 1K_G é feita pela superposição das matrizes elementares

$${}^1K_G^e = \int_{V} {}^1B_G^T {}^1\sigma {}^1B_G dV . \quad (3.19)$$

A matriz 1B_G é obtida a partir da discretização do vetor das derivadas dos deslocamentos,

$$\nabla(\Delta u') = \begin{bmatrix} {}_1\Delta u'_{1,1} & {}_1\Delta u'_{1,2} & {}_1\Delta u'_{1,3} & {}_1\Delta u'_{2,1} & {}_1\Delta u'_{2,2} & {}_1\Delta u'_{2,3} & {}_1\Delta u'_{3,1} & {}_1\Delta u'_{3,2} \end{bmatrix}^T . \quad (3.20)$$

Da relação discretizada

$$\nabla(\Delta u') = {}_1B_G u' , \quad (3.21)$$

resulta

$${}^1B_{NL} = \begin{bmatrix} N_{p,1} & 0 & 0 & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,1} & 0 & 0 & 0 \\ N_{p,2} & 0 & 0 & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{p,1} & 0 & 0 & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,2} & 0 & 0 \\ 0 & N_{p,2} & 0 & 0 & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{p,1} & 0 & 0 & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,1} & 0 \\ 0 & 0 & N_{p,2} & 0 & 0 & \frac{h_p}{2} (t N_p)_{,2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

(nó p)

A matriz tensão de Cauchy ${}^1\sigma$ é expressa por

$${}^1\sigma = \begin{bmatrix} {}^1\sigma_{11} & {}^1\sigma_{12} & {}^1\sigma_{13} & & & & & & \\ & {}^1\sigma_{12} & {}^1\sigma_{22} & {}^1\sigma_{23} & & & & 0 & \\ & {}^1\sigma_{13} & {}^1\sigma_{23} & 0 & & & & & \\ & & & & {}^1\sigma_{11} & {}^1\sigma_{12} & {}^1\sigma_{13} & & \\ & & & & {}^1\sigma_{12} & {}^1\sigma_{22} & {}^1\sigma_{23} & & \\ & & & & {}^1\sigma_{13} & {}^1\sigma_{23} & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & {}^1\sigma_{11} & {}^1\sigma_{12} \\ & & & & & & & & {}^1\sigma_{12} & {}^1\sigma_{22} \end{bmatrix} . \quad (3.23)$$

O vetor de carregamento 2R é definido em coordenadas globais. Conforme explicitado em (2.19), são consideradas cargas superficiais e forças de corpo. Como carregamento superficial, admitem-se cargas pontuais, aplicadas sobre os nós da malha, e cargas distribuídas; como forças de corpo, o peso próprio da estrutura.

O vetor de reações internas 2F resulta do último termo de (2.19). Através da discretização, sua expressão é

$${}^2F = \int_{2V} {}^2Q^T ({}^2B_L {}^2\sigma) dV , \quad (3.24)$$

onde o vetor de Cauchy ${}^2\sigma$ é

$${}^2\sigma = ({}^2\sigma_{11} \ {}^2\sigma_{22} \ {}^2\sigma_{12} \ {}^2\sigma_{23} \ {}^2\sigma_{13})^T . \quad (3.25)$$

CAPÍTULO 4

ELIMINAÇÃO DO TRAVAMENTO ("LOCKING") E ESTABILIZAÇÃO DOS MODOS ESPÚRIOS

Neste capítulo são descritos os fenômenos de travamento de cisalhamento e de membrana, comuns em cascas finas submetidas a esforços fora da superfície média. Em seguida, são citados os métodos empregados para eliminação deste problema, com destaque para a subintegração da matriz de rigidez do elemento. Apresentam-se, então, os modos espúrios de energia zero, consequência da subintegração e o método de estabilização utilizado para sua eliminação.

4.1 Subintegração e modos de energia zero

Os elementos lagrangianos são bastante adequados ao estudo de cascas considerando o efeito de deformação por cisalhamento, uma vez que, sendo de classe C^0 , utilizam funções de interpolação polinomiais de ordem mais baixa que os elementos hermitianos.

Contudo, tais elementos apresentam uma séria deficiência quando aplicados a cascas finas: os travamentos de cisalhamento e de membrana. O travamento de cisalhamento se caracteriza pelo surgimento de tensões cisalhantes muito maiores do que o esperado, ocasionando uma excessiva rigidez do elemento à flexão, com o consequente travamento da estrutura e a deterioração dos resultados. O travamento de membrana traduz a incapacidade do elemento de descrever estados de flexão pura sem apresentar distensão de membrana.

Este fenômeno pode ser analisado em uma viga com curvatura inicial submetida a momento fletor em sua extremidade [11]. Considerando uma viga de largura unitária, a energia de deformação é dada por

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{E h^3}{12} \int_0^L \phi_{,x}^2 dx + k G h \int_0^L (w_{,x} - \phi)^2 dx + E h \int_0^L (u_{,x} + w_{,x}^0 w_{,x})^2 dx \right], \quad (4.1)$$

onde h e L são a espessura e o comprimento da viga,

E e G os módulos de elasticidade,
 k a constante de cisalhamento e
 w_0 a deflexão inicial da viga.

As parcelas do termo da direita na equação acima correspondem, respectivamente, às energias de deformação de flexão, de cisalhamento e de membrana. Como a energia de flexão varia cubicamente com a espessura e as demais linearmente, para vigas muito finas pequenos valores da deformação de cisalhamento $\gamma = w_{,x} - \phi$ e de membrana $\epsilon = u_{,x} + w_{,x}^0 w_{,x}$ (ou até mesmo valores no limite da precisão do computador) estarão associados a grandes valores de energia. O elemento será então muito rígido à flexão e apresentará valores incorretos para deformações e tensões de membrana e de cisalhamento.

Os elementos de casca apresentam comportamento similar aos de viga.

Existem basicamente três métodos para o tratamento do travamento o **método misto**, no qual os campos de deslocamentos e tensões são discretizados independentemente, o **método da decomposição modal**, onde os deslocamentos são projetados em uma base escolhida de forma a minimizar as tensões parasitas e o **método da subintegração**. Neste trabalho, apenas este último será empregado, existindo vasta literatura sobre os demais métodos como, por exemplo, [21] e [22] para o primeiro e [22], [23] e [24] para o segundo.

O método da subintegração consiste em utilizar um esquema de integração de Gauss uma ordem abaixo do necessário para a integração exata das matrizes de rigidez. Como, para o elemento bi-quadrático, o esquema exato é $3 \times 3 \times 2$ pontos (nas direções r, s e t, respectivamente), usa-se um esquema $2 \times 2 \times 2$.

Contudo, este método deve ser empregado cuidadosamente pois, dependendo do problema estudado (malha, condições de contorno, etc), as matrizes de rigidez podem resultar singulares ou quase singulares. A consequência, então, é que a malha irá apresentar campos de deslocamento sem energia de deformação associada; são os modos espúrios ou modos de energia zero.

A obtenção de um modo de energia zero é feito como se segue. Suponha-se que sejam impostas as seguintes translações, normais:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = u_3 = u_4 = 1, \\ u_5 &= u_6 = u_7 = u_8 = -1 \\ u_9 &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

e

Ou seja, aos nós de vértice é imposto um deslocamento unitário positivo, aos nós no meio das arestas um deslocamento unitário negativo e o nó central do elemento é mantido fixo.

De (3.11) resulta

$$\Delta u_1 = 3r^2s^2 - r^2 - s^2 \quad e$$

$$\Delta u_2 = 0$$

e as derivadas

$$\Delta u_{1,r} = 2r(3s^2 - 1)$$

$$\Delta u_{1,s} = 2s(3r^2 - 1)$$

e

$$\Delta u_{2,r} = \Delta u_{2,s} = 0 .$$

Assim, nos pontos $r = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (pontos de integração 2×2),

todas as derivadas são nulas e, conseqüentemente, todas as componentes de deformação. Desta forma, nenhuma energia de deformação é associada ao campo de deslocamentos estabelecido em (4.2); este campo expressa, portanto, um modo espúrio do elemento estudado. O elemento de 9 nós apresenta sete modos de energia zero, sendo dois possíveis somente em uma malha de um elemento apenas, pois não são comunicáveis, enquanto os demais podem se propagar em malhas maiores.

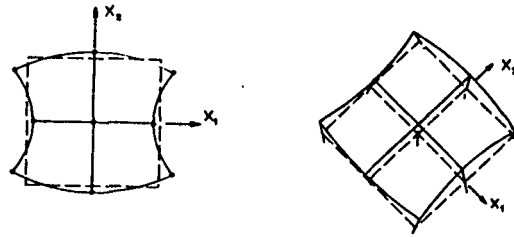
Dos modos não comunicáveis, também denominados modos incompatíveis, um é de translação, tendo a expressão

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} x_1 \left(1 - 3x_2^2 \right) \\ x_2 \left(1 - 3x_1^2 \right) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

e o outro de rotação, sendo expresso por

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} x_1 \left(1 - 3x_2^2 \right) \\ x_2 \left(1 - 3x_1^2 \right) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Estes modos são mostrados na Figura 4.



$$u = c_1 x_1 (1 - 3x_2^2)$$

$$v = c_1 x_2 (1 - 3x_1^2)$$

$$\theta_1 = c_2 x_1 (1 - 3x_2^2)$$

$$\theta_2 = c_2 x_2 (1 - 3x_1^2)$$

Figura 4 - Modos espúrios não comunicáveis

Dos modos comunicáveis, ou compatíveis, três são de translação,

$$u_i = c_i \left(x_1^2 + x_2^2 - 3 x_1^2 x_2^2 \right), \quad i=1,3 \quad (\text{não soma em } i) \quad (4.5)$$

e dois de rotação,

$$\theta_i = c_i \left(x_1^2 + x_2^2 - 3 x_1^2 x_2^2 \right), \quad i=1,2. \quad (\text{não soma em } i) \quad (4.6)$$

Os modos compatíveis são apresentados na Figura 5.

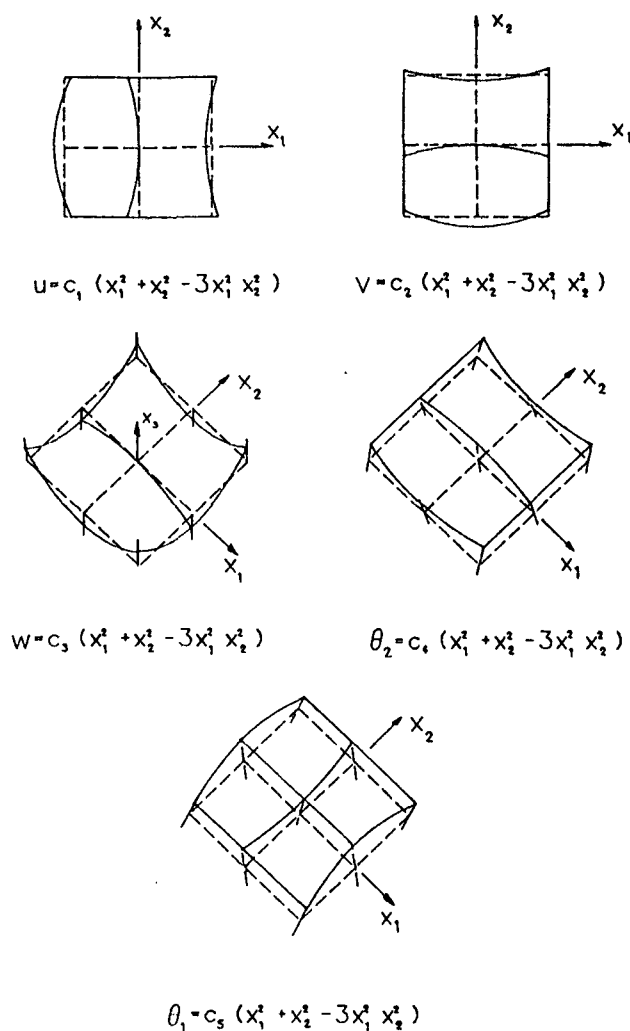


Figura 5 - Modos espúrios comunicáveis

4.2 Estabilização dos modos espúrios

4.2.1 Obtenção do operador

O controle dos modos espúrios pode ser feito adicionando-se aos elementos da matriz de rigidez um operador formulado de maneira a, por um lado, não interferir nos campos de deslocamentos reais e, por outro, introduzir rigidez na direção destes autovetores. Uma justificativa conceitual deste método é desenvolvida por **Belytschko et al** [24], que mostram, através do princípio variacional de Hu-Washizu, que esta estabilização equivale a recuperar a parcela dos termos da diagonal da matriz de rigidez perdidos na integração reduzida. Este operador é freqüentemente referido como operador γ e o elemento finito que o utiliza, por extensão, elemento γ .

Para satisfazer as condições acima, o operador γ é obtido como combinação linear dos vetores de uma base ortogonal aos movimentos de corpo rígido e aos campos de deslocamento linear e quadrático; além disto, deve ter uma componente paralela ao vetor dos modos espúrios (Eq. 4.2). O operador é construído nos pontos α , definidos no Capítulo 3.

Os seguintes vetores definem qualquer campo de deslocamentos até segunda ordem, onde $(x'_1)_p$ são as coordenadas do nó p no sistema local do ponto α genérico:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \\
 x &= \begin{bmatrix} (x'_1)_1 & (x'_1)_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (x'_1)_9 \end{bmatrix}^T, \\
 y &= \begin{bmatrix} (x'_2)_1 & (x'_2)_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (x'_2)_9 \end{bmatrix}^T, \\
 x^2 &= \begin{bmatrix} (x'_1)_1^2 & (x'_1)_2^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (x'_1)_9^2 \end{bmatrix}^T, \\
 y^2 &= \begin{bmatrix} (x'_2)_1^2 & (x'_2)_2^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (x'_2)_9^2 \end{bmatrix}^T, \\
 xy &= \begin{bmatrix} (x'_1 x'_2)_1 & (x'_1 x'_2)_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (x'_1 x'_2)_9 \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Construir um operador ortogonal a s_1 garante que os movimentos de corpo rígido não serão afetados, isto é, não surgirá energia de deformação devido a este campo de deslocamentos. Semelhantemente, sendo o operador tomado ortogonal a x e y , isto é, aos campos de deslocamentos lineares, garante-se que os estados de deformação de membrana constantes não são afetados. Finalmente, para se garantir que o elemento represente corretamente os estados de flexão e torção puras, faz-se o operador ortogonal aos vetores x^2 , y^2 e xy , que representam os campos de deslocamento quadráticos.

Para construir este operador, usa-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, definindo-se a seguinte base:

$$s_2 = x - \frac{x \cdot s_1}{s_1 \cdot s_1} s_1 ,$$

$$s_3 = y - \sum_{i=1}^2 \frac{y_i \cdot s_i}{s_i \cdot s_i} s_i ,$$

$$s_4 = x^2 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2 \cdot s_i}{s_i \cdot s_i} s_i ,$$

$$s_5 = y^2 - \sum_{i=1}^4 \frac{y_i^2 \cdot s_i}{s_i \cdot s_i} s_i ,$$

$$s_6 = xy - \sum_{i=1}^5 \frac{x_i y_i \cdot s_i}{s_i \cdot s_i} s_i ,$$

O vetor de modos espúrios mostrado em (4.2) é comumente denominado vetor h . A ortogonalização deste vetor com relação à base s_i resulta em

$$r = h - \sum_{i=1}^6 \frac{h \cdot s_i}{s_i \cdot s_i} s_i . \quad (4.8)$$

A normalização deste vetor pela componente máxima resulta, então, na expressão do operador:

$$\gamma = \frac{r}{(r_i)_{\max}} . \quad (4.9)$$

4.2.2 Construção da matriz de estabilização

Uma vez obtido o operador γ , definem-se as deformações generalizadas de estabilização em cada ponto de integração α ,

$$\varepsilon^\alpha = B^\gamma \Delta d' , \quad (4.10)$$

onde $\Delta d'$ é o vetor dos graus de liberdade locais (Eq. 3.7).

A matriz deformação-deslocamento de estabilização B^γ tem a expressão

$$B^\gamma = [L_1 \quad L_2 \quad - \quad - \quad L_9] , \quad (4.11)$$

onde as matrizes que a compõem são definidas como

$$L_1 = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

As tensões generalizadas de estabilização são definidas através da relação constitutiva

$$\sigma^\gamma = D^\gamma \epsilon^\gamma, \quad (4.13)$$

onde a matriz de coeficientes de estabilização é

$$D^\gamma = \begin{bmatrix} g_{m1} & & & & \\ & g_{m2} & & & \\ & & g_r & & \\ & 0 & & g_{c1} & \\ & & & & g_{c2} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Os coeficientes acima são fatores de ajuste numérico, introduzidos para ponderar a rigidez devida ao procedimento de estabilização frente à rigidez original do modelo. Esta ponderação é necessária pois, se os elementos da matriz de estabilização são muito pequenos frente aos elementos das matrizes linear e geométrica, alguns modos de energia zero podem persistir; se, por outro lado, são muito maiores, pode ocorrer enrigecimento artificial do modelo.

Diversos procedimentos foram propostos para determinação destes coeficientes. Verhegghe & Powell [14] sugerem, para placas planas, a adoção de um valor único, igual ao maior elemento da diagonal da matriz de rigidez linear elementar. Este método, contudo, conduz a resultados de flexão excessivamente rígidos quando aplicado a cascas. White & Abel [16] sugerem os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
g_{m1} &= F_e C_{m1} \\
g_{m2} &= F_e C_{m2} \\
g_f &= 0.125 F_e \frac{h^3}{J'_\alpha} C_f \\
g_{c1} &= 1.25 F_e \frac{t^3}{J'_\alpha} C_{c1} \\
g_{c2} &= 1.25 F_e \frac{t^3}{J'_\alpha} C_{c2}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

O fator F_e é um parâmetro numérico sem significado físico. Nos casos mais simples, normalmente pode ser tomado igual à unidade. O parâmetro h é a espessura do elemento, enquanto J'_α é o jacobiano no ponto α considerado, medido em coordenadas locais.

O fator C_{m1} é obtido como se segue. Inicialmente, a matriz de rigidez linear definida em (3.16) é expressa na forma

$$K_L = \sum_{\alpha=1}^4 K_\alpha, \tag{4.16}$$

onde K_α é a contribuição à rigidez do ponto de integração α .

Considere-se agora o conjunto formado pelos elementos da diagonal de K_α que multiplicam os graus de liberdade u'_{1p} (Eq. 3.7). O fator C_{m1} é tomado igual ao maior elemento deste conjunto.

Os fatores C_{m2} , C_f , C_{c1} e C_{c2} são obtidos de forma similar considerando-se, respectivamente, os conjuntos dos elementos $(K_\alpha)_{ii}$ relacionados aos graus de liberdade u'_{2p} , u'_{3p} , U'_{1p} e U'_{2p} .

Belytschko et al. [10] sugerem, para materiais isotrópicos, os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
g_{m1} &= g_{m2} = \frac{h^2}{256 A} \text{INT1}, \\
g_f &= \frac{h^2}{2560 A} \text{INT1}, \\
g_{c1} &= g_{c2} = \frac{1}{256} \text{INT2}, \text{ onde}
\end{aligned}$$

$$\text{INT1} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{h}^T \cdot \mathbf{b}_i) G h (\mathbf{h}^T \cdot \mathbf{b}_j) J_{\alpha} dr ds ,$$

$$\text{INT2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{h}^T \cdot \mathbf{b}_i) \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} (\mathbf{h}^T \cdot \mathbf{b}_j) J_{\alpha} dr ds ,$$

$$A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J_{\alpha} dr ds,$$

sendo E, G e ν módulos de elasticidade e coeficiente de Poisson,

h a espessura do elemento,

J_{α} o jacobiano no ponto α ,

h o vetor dos modos espúrios, definido em (4.2) e

$\mathbf{b} = \frac{\partial N}{\partial \mathbf{x}_1}$, sendo N as funções de interpolação apresentadas na Tabela 1.

Neste trabalho, adotou-se o procedimento sugerido por White e Abel, por sua maior simplicidade e precisão.

Sendo as matrizes \mathbf{B}^{γ} e \mathbf{D}^{γ} definidas conforme explicitado, a matriz de estabilização é expressa por

$$\mathbf{K}^{\gamma} = \sum_{\alpha=1}^4 (\mathbf{B}^{\gamma})^T \mathbf{D}^{\gamma} \mathbf{B}^{\gamma} . \quad (4.17)$$

A adição das matrizes de rigidez linear e geométrica à matriz de estabilização é feita na forma

$$\mathbf{K} = \sum_{\alpha=1}^4 \mathbf{Q}^T \left[\mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_G^T \sigma \mathbf{B}_G + (\mathbf{B}^{\gamma})^T \mathbf{D}^{\gamma} \mathbf{B}^{\gamma} \right] \mathbf{Q} . \quad (4.18)$$

4.2.3 Contribuição das forças de estabilização ao vetor resíduo

A reação sobre os nós, energeticamente correspondente às tensões de estabilização, é adicionada, a cada iteração, ao vetor elementar das reações internas.

Estas forças são calculadas através de

$$\mathbf{f}^{\gamma} = \mathbf{K}^{\gamma} \Delta \mathbf{d} . \quad (4.19)$$

A atualização das forças de estabilização é feita como se segue. Ao final de uma iteração, as deformações e tensões de estabilização incrementais são calculadas através de

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon^{\gamma} &= {}^1\mathbf{B}^{\gamma} \Delta \mathbf{d}, \\ \Delta \sigma^{\gamma} &= {}^1\mathbf{D}^{\gamma} \Delta \varepsilon^{\gamma},\end{aligned}\tag{4.20}$$

onde ${}^1\mathbf{B}^{\gamma}$ e ${}^1\mathbf{D}^{\gamma}$ se referem à configuração inicial do passo atual, antes da primeira iteração. O incremento de tensão de estabilização é, então, acrescentado à tensão de estabilização inicial do passo, ${}^1\sigma^{\gamma}$ e as forças nodais de estabilização calculadas através de

$$\mathbf{f}^{\gamma} = {}^1\gamma ({}^1\sigma^{\gamma} + \Delta \sigma^{\gamma}).\tag{4.21}$$

onde o operador γ é calculado na configuração $\Omega^{(1)}$.

As forças de estabilização são introduzidas na equação de equilíbrio discretizada adicionando-as às reações internas (Eq. 3.24). O vetor ${}^2\mathbf{F}$ passa a ser determinado, portanto, da seguinte forma:

$${}^2\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^4 {}^2\mathbf{Q}^T \left[\sum_{\beta=1}^2 ({}^2\mathbf{B}_L {}^2\sigma + \mathbf{f}^{\gamma}) (\det {}^2\mathbf{J}) w_{\alpha\beta} \right],\tag{4.22}$$

onde α e β são pontos de integração definidos no Capítulo 3 e $w_{\alpha\beta}$ são pesos de Gauss.

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS NUMÉRICOS

Apresentam-se nesta seção os resultados de problemas resolvidos para validação do elemento e comprovação de sua eficiência. Foram selecionados exemplos lineares e não lineares e, para demonstrar a versatilidade do elemento, foram resolvidos casos de vigas e placas (quadrada e circular) e utilizadas variadas condições de carregamento (cargas concentradas e distribuídas e peso próprio).

A implementação computacional da formulação desenvolvida neste trabalho resultou no programa CASCA, codificado em linguagem FORTRAN-77. Utilizou-se o método iterativo de Newton-Raphson padrão, onde as matrizes de rigidez são recalculadas a cada iteração e, para solução do sistema de equações, o método da eliminação de Gauss. A verificação da convergência foi feita em cada iteração, em termos dos resíduos de forças e deslocamentos. O critério adotado foi

$$\frac{||\Delta d||}{||u||} \leq 10^{-4} \quad \text{e} \quad \frac{||\Delta R||}{||R||} \leq 10^{-3}, \quad (5.1)$$

onde $||\Delta d||$ e $||u||$ são as normas do vetor de deslocamentos nodais da iteração atual e do vetor de deslocamentos totais acumulados e $||\Delta R||$ e $||R||$ as normas do vetor resíduo de força e do vetor carregamento total, respectivamente.

Em quase todos os exemplos lineares permitiu-se a iteração da solução, caso o limite para convergência não tivesse sido alcançado na primeira resposta. Este procedimento equivale ao método iterativo de Loubinac [19, p. 101], que visa a melhoria dos resultados de tensões.

Para efeitos de comparação, foi testado também o elemento com esquema de integração $3 \times 3 \times 2$, denominado I33; o elemento desenvolvido neste trabalho recebeu a denominação I22.

Um conjunto padrão de testes para elementos de vigas, placas, cascas e elementos tridimensionais é proposto por MacNeal e Harder [33], com o objetivo de verificar a maioria dos parâmetros que possam afetar sua precisão. Para os elementos de

placas e cascas, foram propostos naquela referência os seguintes problemas e testes: "patch test", testes para placa apoiada e engastada, teto de Scordelis-Lo e casca semi-esférica. Todos estes casos foram incluídos neste trabalho.

Em todos os casos analisados as grandezas empregadas, como dimensões, forças, pressões e peso próprio, são expressas em unidades coerentes.

5.1 Análise linear

5.1.1 "Patch test"

O "patch test" consiste em submeter-se uma malha não regular de elementos a uma sequência de casos de deformação constante. A aprovação nestes testes garante que o elemento convergirá para a solução exata à medida em que a malha for refinada.

Neste trabalho, seguiu-se o "patch test" recomendado por Huang e Hinton [12], que consiste em submeter-se uma malha distorcida de cinco elementos a estados puros de tração, flexão, cisalhamento de membrana e transversal e torção (Figura 6).

Para os testes de tração e cisalhamento, utilizou-se uma força por unidade de comprimento de $F=60,0$, devendo ser encontradas nos casos (a), (b), (d) e (e) as tensões

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \frac{F}{A} = 6,0. \quad (5.2)$$

Nos testes de flexão e torção, usou-se um momento por unidade de comprimento de $M=0,06$, devendo ser encontradas, nos pontos de integração, a tensão

$$\sigma = \frac{M t}{I} = 0.207846, \quad (5.3)$$

onde t é a distância do ponto de integração à superfície média da placa e I o momento de inércia da seção, dado por

$$I = \frac{h^3}{12}. \quad (5.4)$$

Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 2, em termos de números de algarismos significativos concordantes com a solução analítica.

Caso	a	b	c	d	e	f
Precisão	3	3	3	9	8	3

Tabela 2
"Patch test" - resultados

Estes resultados indicam que, com excessão dos casos de cisalhamento, a precisão no cálculo das tensões ficou aquém do esperado. Porém, como os testes descritos no Capítulo 5 demonstram, esta precisão foi suficiente para garantir um bom desempenho do elemento em casos lineares e não lineares.

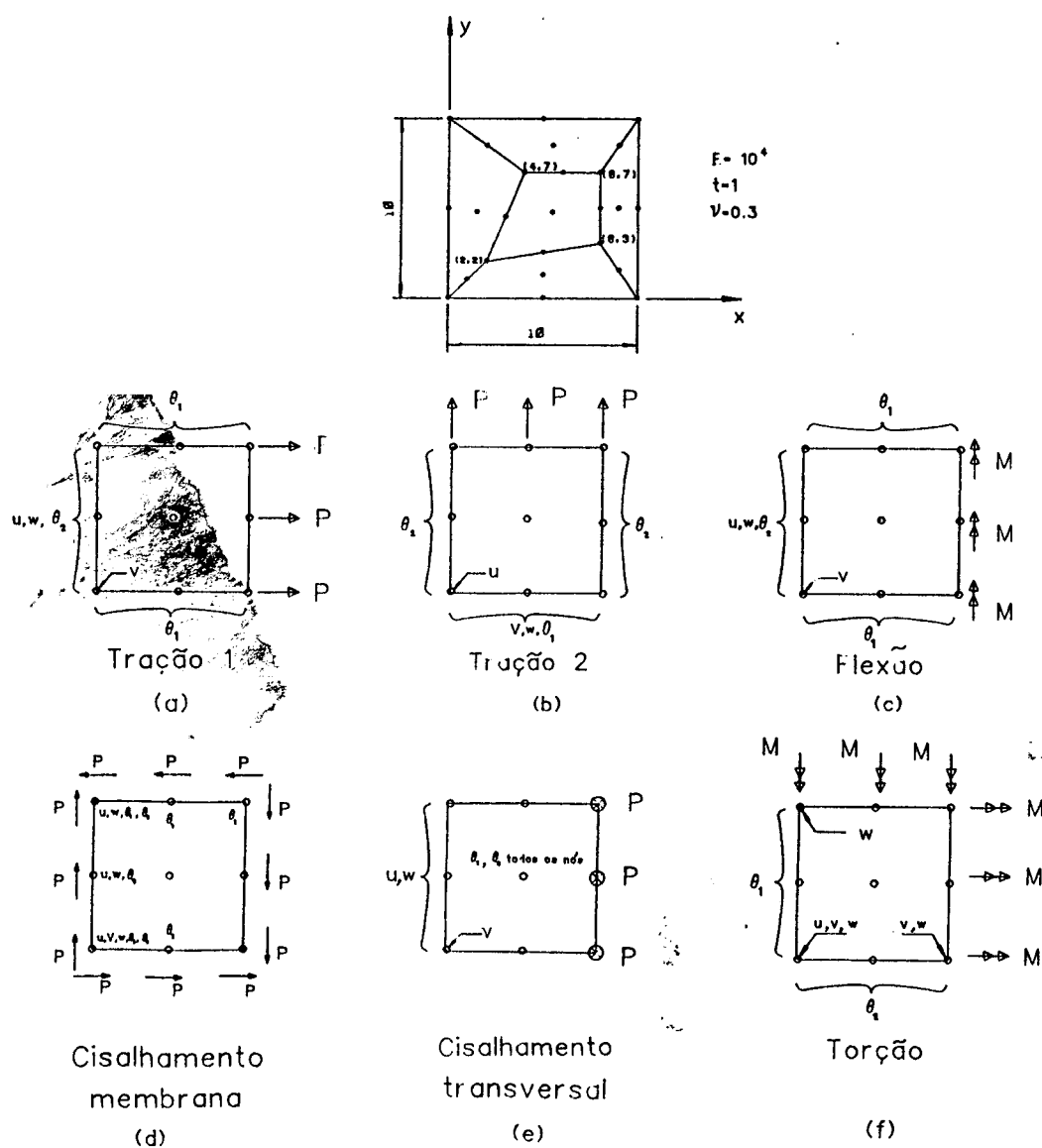
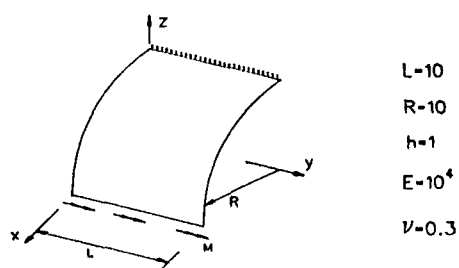


Figura 6
"Patch test"

White e Abel [30] sugerem como "patch test" de casca o teste mostrado na Figura 7. Trata-se de um setor de cilindro engastado submetido a flexão pura, usando-se para modelamento malhas regular e distorcida. A solução teórica para o deslocamento horizontal da extremidade livre é, segundo os autores,

$$u = \frac{12 (1-\nu^2) R^2 M}{E h^3} \quad (5.5)$$

Para os parâmetros em questão, obtém-se $u = 0,0019656$.



Sol. exata: $u=0.0019656$

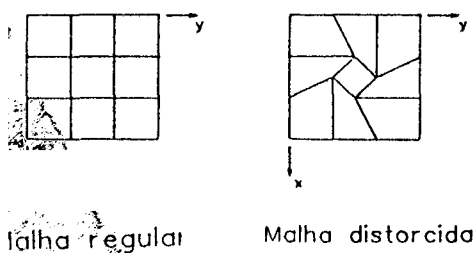


Figura 7

Setor de cilindro fletido

O elemento utilizado por White e Abel, denominado LAG9, e o elemento I22 têm formulação similar. Na Tabela 3 apresentam-se os resultados obtidos, em termos do erro com relação à solução teórica.

Elemento	Erro c/ rel. à sol. ex.	
	Malha regular	Malha distorcida
LAG9	0.001	0.053
I 22	0.001	0.051

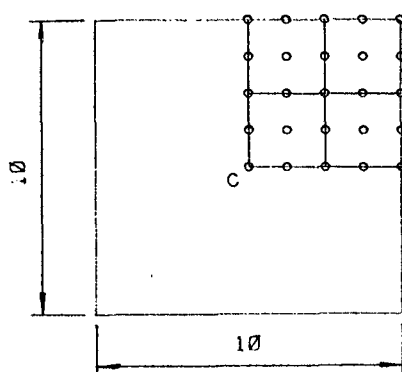
Tabela 3
Resultados do setor de cilindro engastado

5.1.2. Placas

Foram resolvidos dois casos de placas quadradas e circulares, variando-se espessura, carregamento e tipo de apoio.

5.1.2.1 Placa quadrada

Foi feito inicialmente um estudo sobre os efeitos da variação da relação espessura/comprimento do lado. Uma placa simplesmente apoiada, submetida a carregamento uniformemente distribuído, foi testada com relação h/a variando de 10^1 a 10^4 . Por simetria, modelou-se apenas um quarto do domínio, usando-se uma malha regular de quatro elementos (Figura 8). Os resultados obtidos são mostrados no gráfico da Figura 9, sendo que a solução analítica é obtida utilizando-se a teoria de placa fina de Timoshenko [17]. Observa-se que mesmo para placas extremamente finas ($t/a = 10^4$), nenhum dos elementos apresenta travamento.



Solução analítica [17]: $w_c = 0.004062 \frac{q a^4}{D}$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Figura 8

Placa quadrada apoiada nos quatro lados

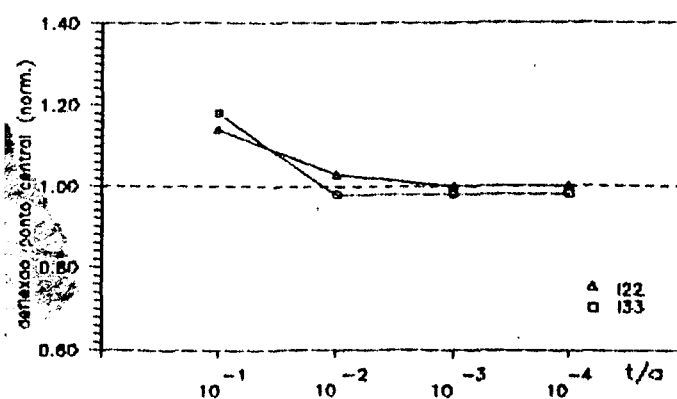
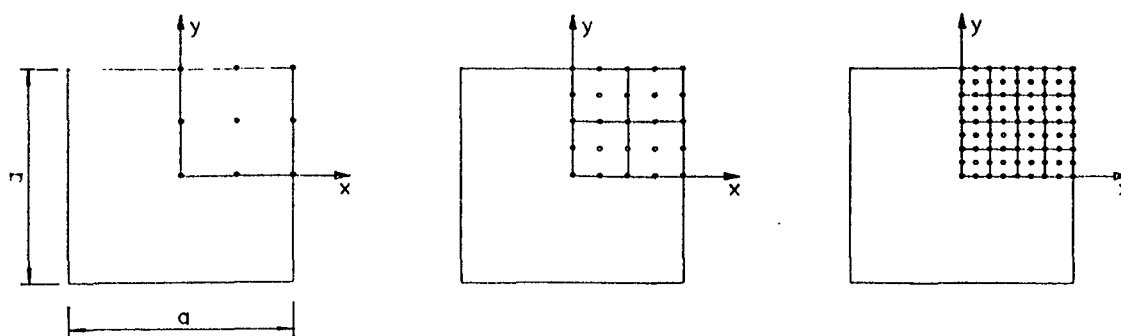


Figura 9

Placa apoiada - deflexão no ponto central

Em seguida, foi feito um estudo de convergência para o elemento I22, usando-se malhas de 1, 4 e 16 elementos (Figura 10). Foram testadas placas simplesmente apoiada (SA) e engastada (EN), submetidas a carregamento uniformemente distribuído (CD) e a carga concentrada no centro (CC). A solução analítica, também segundo Timoshenko, é apresentada na Tabela 4.



$$h=0.1$$

$$\eta=10$$

$$E=3 \times 10^9$$

$$\nu=0.3$$

Carregamento: distribuído, $q=10^{-2}$

concentrado, $P=40$

Figura 10

Malhas usadas no estudo de convergência para placa quadrada

Carregamento	Cond. cont.	Solução analítica - deflexão central [17]
Distribuído	Apoio	$w = 0.004062 \frac{qa^4}{D} = 1.479 \times 10^{-3}$
	Engaste	$w = 0.00126 \frac{qa^4}{D} = 4.587 \times 10^{-4}$
Concentrado	Apoio	$w = 0.0116 \frac{Pa^2}{D} = 1.688 \times 10^{-3}$
	Engaste	$w = 0.0056 \frac{Pa^2}{D} = 8.154 \times 10^{-4}$

Tabela 4

Placa quadrada - solução analítica

A Figura 11(a) mostra os resultados normalizados de deflexão no ponto central, praticamente convergidos a partir da malha de quatro elementos.

Na Figura 11(b) são apresentados os momentos M_x no ponto de integração mais próximo do centro da placa, normalizados com relação ao momento teórico no ponto

central. Estes resultados são computados somente para os casos com carregamento distribuído, uma vez que, nos casos de carga concentrada, ocorre singularidade em torno do ponto de aplicação do carregamento. Os resultados obtidos convergem por baixo do valor exato, por ser máximo o momento no ponto central. Deve-se destacar ainda que, à medida que a malha vai sendo refinada, o ponto de integração pesquisado se aproxima do centro da placa.

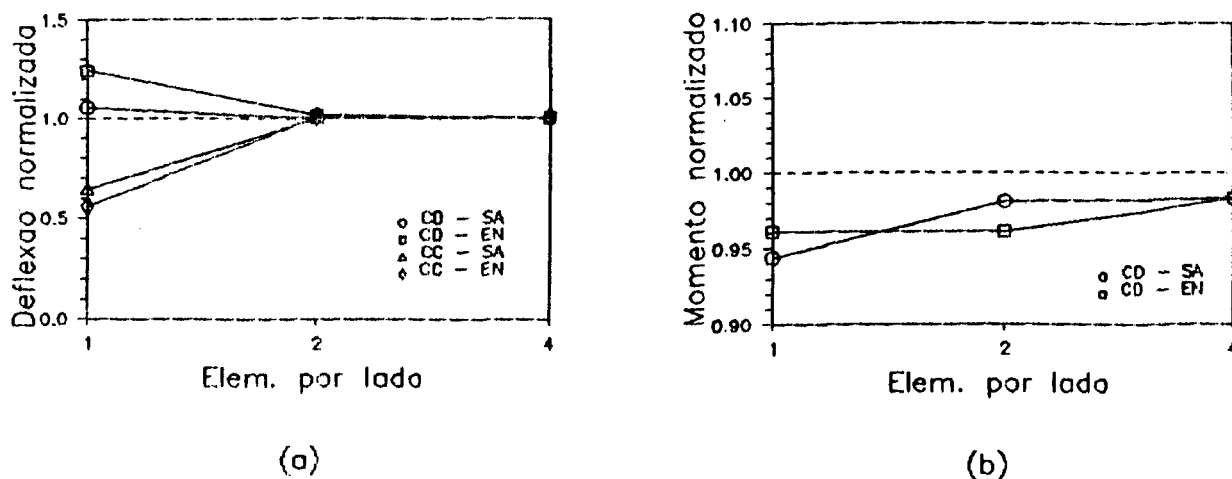
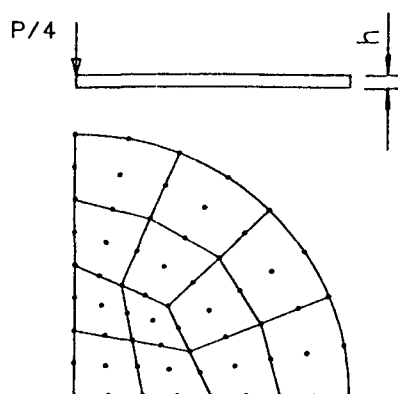


Figura 11

Teste de convergência - resultados normalizados

5.1.2.2 Placa circular engastada

O conjunto de testes para placa circular também foi realizado em duas etapas. Na primeira, uma placa engastada submetida a uma carga concentrada no centro, foi testada com diversas relações espessura/raio. Utilizou-se uma malha de 12 elementos para modelar um quarto da placa, conforme mostrado na Figura 12. Devido à distorção da malha, os resultados obtidos foram inferiores ao caso anterior. Enquanto o elemento I22 apresentou deflexões apenas um pouco abaixo da solução exata (para $h/a \leq 10^2$), o elemento I33 sofreu pronunciado travamento de cisalhamento (Figura 13).



Solução analítica [17]: $w_c = \frac{Pr^2}{16\pi D}$

Figura 12
Placa circular engastada

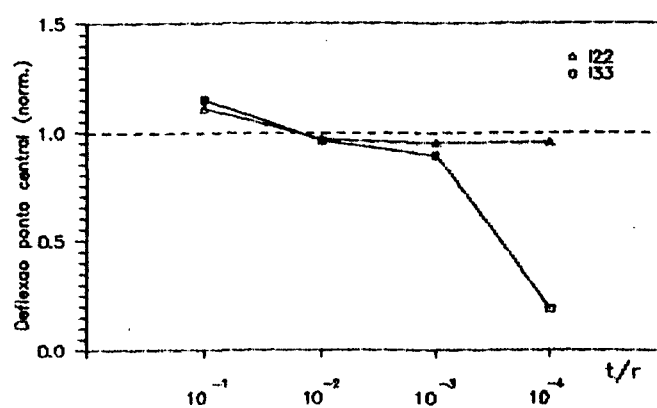
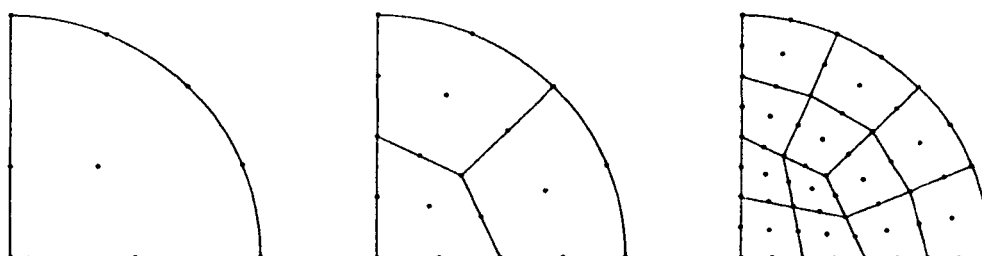


Figura 13
Placa circular – deflexão ponto central

Na segunda etapa, o elemento I22 foi submetido a um teste de convergência, com refinamento de malha. Foi testada uma placa engastada, com carregamento concentrado ou uniformemente distribuído, sendo a solução teórica, ainda segundo Timoshenko, mostrada na Tabela 5; as malhas usadas são mostradas na Figura 14.

Carregamento	Solução analítica - deflexão central [17]
Distribuído	$w = \frac{qr^4}{64D} = 1.706 \times 10^{-2}$
Concentrado	$w = \frac{Pr^2}{16\pi D} = 8.690 \times 10^{-4}$

Tabela 5
Placa circular - solução analítica



$t=0.1$
 $\mu=10$
 $E=10^6$
 $\nu=0.3$

Carregamento: distribuído, $q=10$

concentrado, $P=0.04$

Figura 14

Malhas usadas no teste de convergência para placa circular

Os resultados são mostrados na Figura 15(a), para deflexões no ponto central e na Figura 15(b) para momentos no ponto de Gauss mais próximo do centro da placa. Assim como para a placa quadrada, somente foi verificado momento no caso de carregamento distribuído.

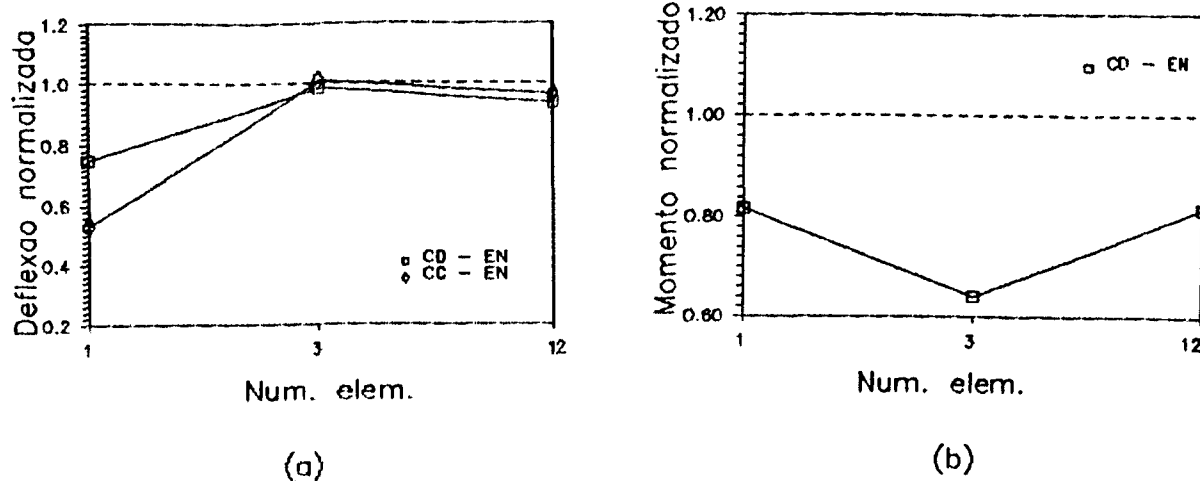


Figura 15

Teste de convergência - resultados normalizados

5.1.3. Cascas

Para o estudo linear de cascas, três casos foram resolvidos: o teto de Scordelis-Lo, o cilindro puncionado e a casca hemisférica. Novamente foram testados os elementos I22 e I33, com diversas malhas. Os parâmetros utilizados são apresentados na Tabela 6.

	Teto de Scordelis-Lo	Cilindro puncionado	Casca hemisférica
Compr. L	50,0	600,0	—
Raio R	25,0	300,0	10,0
Espes. h	0,25	3,0	0,04
E	$4,32 \times 10^8$	$3,0 \times 10^6$	$6,825 \times 10^7$
ν	0,0	0,3	0,3
Condição contorno desloc.	Diafragmas rígidos nas bordas curvas	Diafragmas rígidos nas extremidades	Borda inferior livre
Carreg.	Peso próprio $q=90.0$	Forças puntuais o-postas na seção média: $F=1.0$	Forças defasadas de 90° , aplicadas em sentidos opostos com relação ao centro da semi-esfera; $P=1,0$
Solução exata	Deflexão no ponto médio da borda livre $w=0.3024$ [11]	Deslocamento radial no ponto de aplicação do carregamento $w=0.18248 \times 10^{-4}$ [11]	Desl. radial no ponto de aplicação da carga $w=0.0924$ [11]

Tabela 6
Parâmetros para casos de cascas lineares

O caso do teto de Scordelis-Lo [32] consiste de uma casca cilíndrica livre nos vértices retilíneos e apoiada em diafragmas rígidos nas extremidades circulares, submetida a carregamento de peso próprio (Figura 16). Por simetria, apenas um quarto do domínio é modelado.

A solução analítica para deflexão vertical do ponto médio da aresta retilínea, $w = -0,3024$, é apresentada por MacNeal et al. [33], que destacam, nesta referência, que o valor citado por Scordelis e Lo [32] é -0.3086 . Os resultados obtidos são apresentados no gráfico da Figura 17, mostrando rápida convergência do elemento I22, ao passo que o elemento I33 sofre travamento mesmo para malhas mais refinadas. Este teste é adequado à verificação da capacidade de um elemento em representar campos de deformação de membrana complexos.

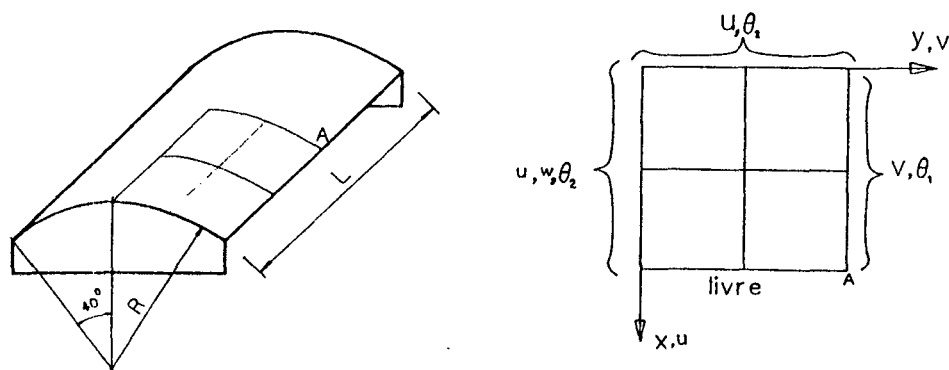


Figura 16
Teto de Scordelis-Lo

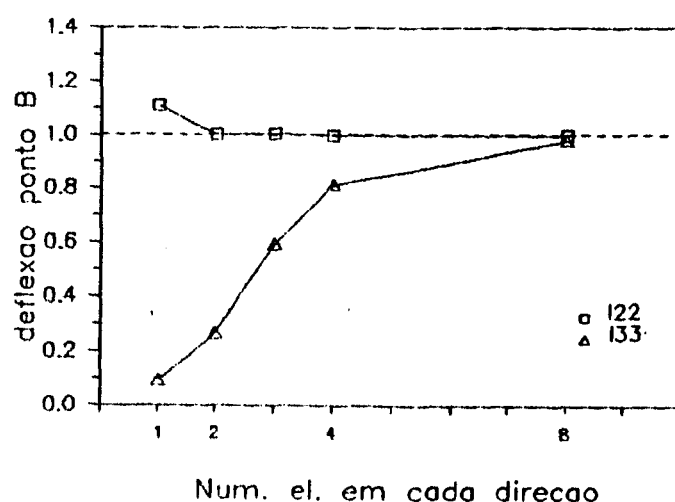


Figura 17
Deflexões normalizadas para o teto de Scordelis-Lo

O segundo exemplo consiste de um cilindro com diafragmas nas extremidades sob a ação de duas cargas concentradas diametralmente opostas e equidistantes das extremidades (Figura 18). Neste teste se verifica a capacidade do elemento em descrever estados complexos de deformação de membrana e de flexão. Devido às condições de simetria, simula-se apenas um oitavo do domínio.

A solução analítica, deflexão vertical do ponto de aplicação do carregamento $w = 0.18248 \times 10^4$, é apresentada por Belytschko et al. [11]. Os resultados, mostrados na Figura 19, indicam que o elemento 122 apresenta resultados praticamente convergidos para malhas acima de 4×4 elementos, enquanto a convergência do elemento 133 é extremamente lenta.

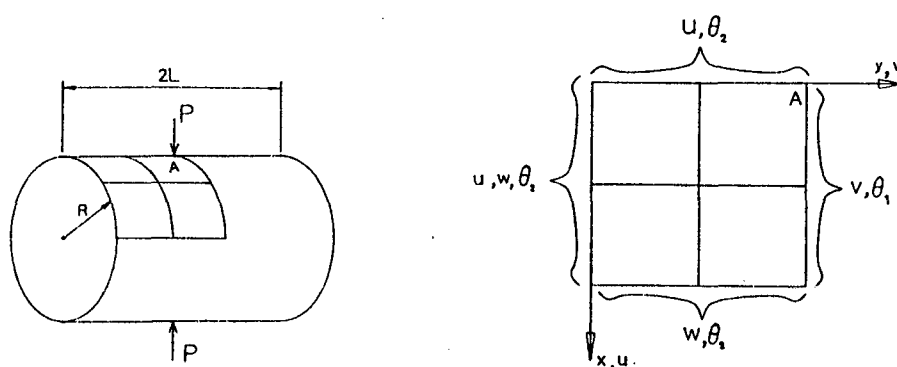


Figura 18
Cilindro puncionado

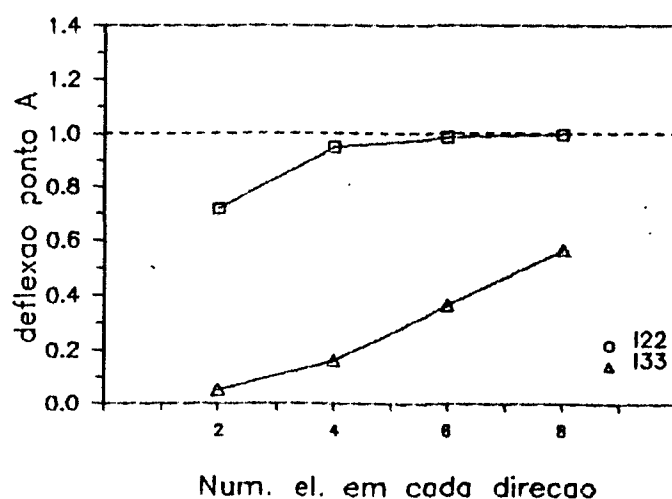


Figura 19
Deflexão no ponto de aplicação do carregamento

O terceiro exemplo, casca hemisférica submetida a cargas radiais defasadas de 90° e de sentido alternado (Figura 20), é usado para verificação da habilidade de modelamento de estados de flexão sem distensão de membrana, uma vez que as deformações de membrana quase não existem. Além disto, como elementos mais afastados dos pontos de aplicação do carregamento praticamente apresentam rotação de corpo rígido, também esta capacidade é testada.

A solução analítica é novamente citada por **MacNeal e Harder** [33], consistindo do deslocamento radial $w = 0.0924$ do ponto de aplicação do carregamento. Os resultados são mostrados no gráfico da Figura 21 e indicam boa convergência do elemento I22, com resultados próximos à solução exata a partir da malha 4×4 . O elemento I33 apresenta forte travamento de cisalhamento, mesmo em malhas mais refinadas.

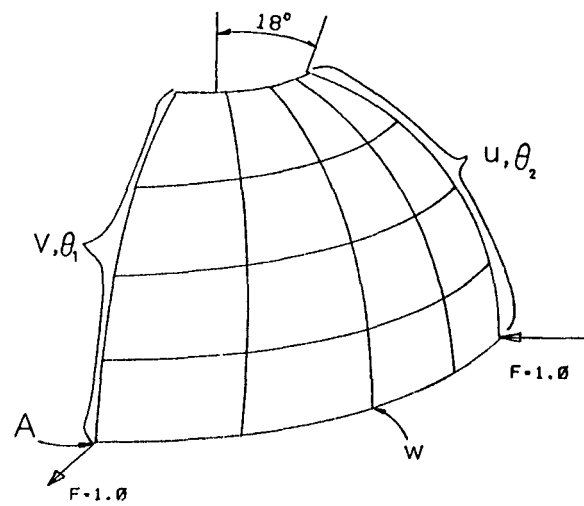


Figura 20
Casca semi-esférica

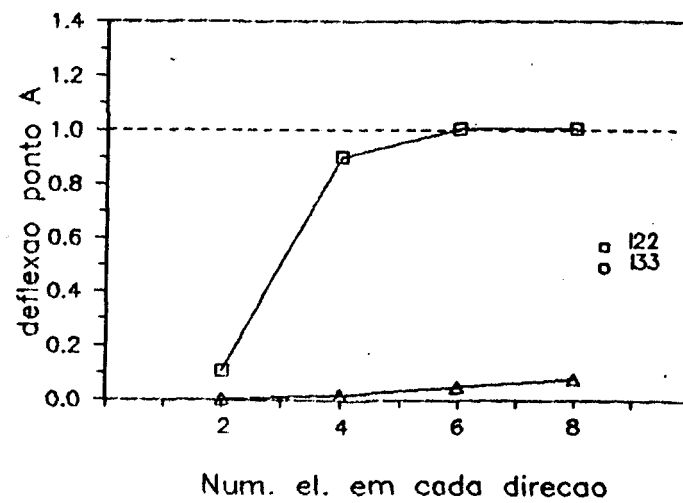
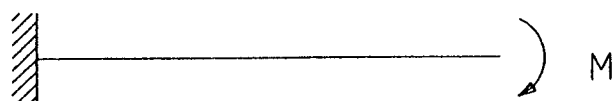
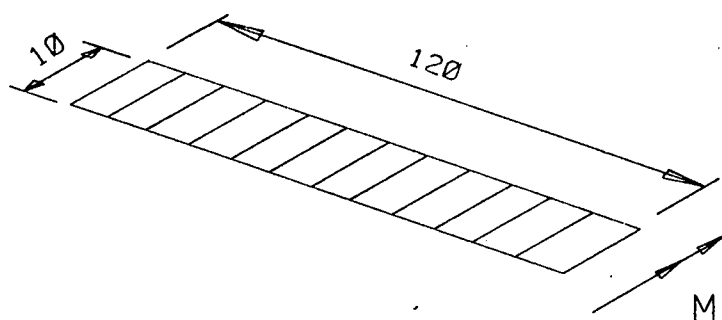


Figura 21
Desl. radial no ponto de aplicação da carga

5.2. Análise não linear

5.2.1. Placa engastada submetida a flexão pura

Neste exemplo, uma placa engastada de grande comprimento é submetida a um momento fletor em sua extremidade livre (Figura 22). A solução analítica, apresentada por Ramm [18], é tal que as configurações intermediárias correspondem a um arco de circunferência cujo centro se localiza na vertical tomada do ponto de engaste, conforme mostrado na Figura 23.



$$h=1.0$$

$$E=10^4$$

$$\nu=0.0$$

$$M=436.332313$$

Figura 22

Placa submetida a momento fletor

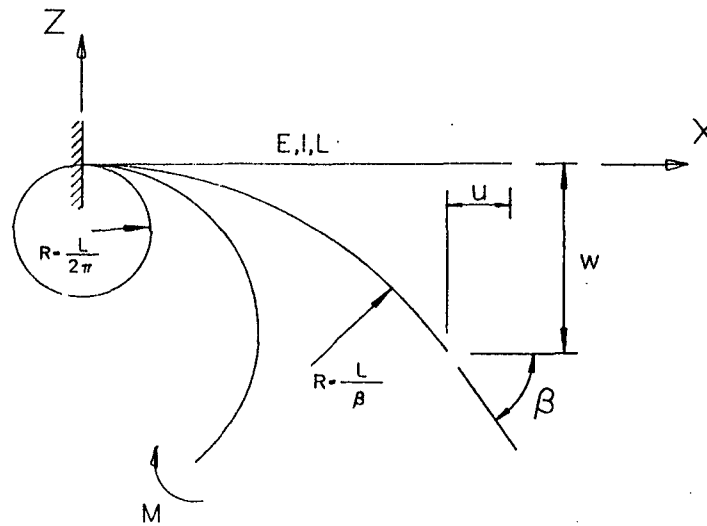


Figura 23

Placa fletida - configurações intermediárias

O raio a cada configuração é dado por

$$R = \frac{E I}{M_p}, \quad (5.6)$$

onde E é o módulo de elasticidade,

I o momento de inércia da seção,

e M_p o momento fletor acumulado até o passo atual.

O modelo usado constitui-se de uma malha de 12 elementos dispostos consecutivamente ao longo do comprimento da placa. O carregamento é aplicado em 41 passos, como se segue:

Passo	Coef. de carga
1-6	0.05
7-41	0.02

A diminuição do coeficiente de carga a partir do 7º passo se deve a que, como a variação da geometria é grande a esta altura, a convergência no processo de Newton-Raphson é perdida se se mantém o coeficiente de carga inicial.

O gráfico da Figura 24 apresenta os resultados normalizados de deslocamento axial (u/L), deflexão vertical (w/L) e rotação ($\beta/2\pi$) da extremidade livre e a Figura 25 mostra algumas configurações intermediárias.

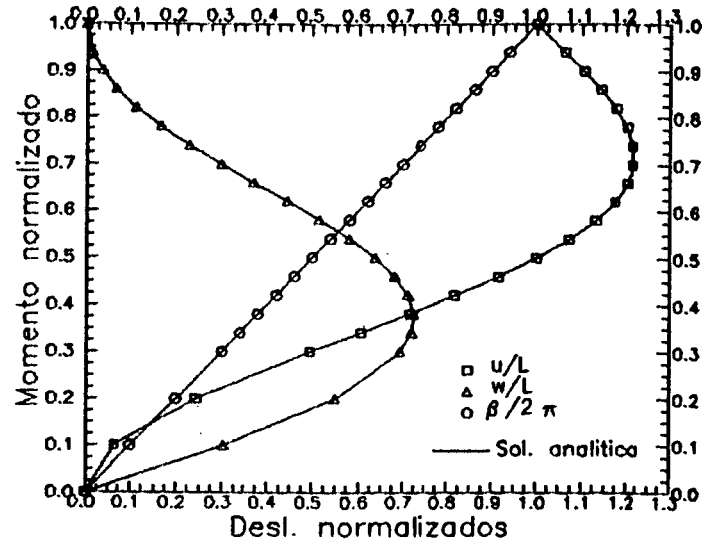


Figura 24

Placa fletida - deslocamentos normalizados

A Tabela 7 mostra resultados de deslocamentos, rotações e tensões em algumas configurações intermediárias.

Passo	Deslocamentos		Rotação	Tensões ⁽²⁾	
	u/\bar{u}	w/\bar{w}		$\sigma_x/\bar{\sigma}_x$	$\sigma_{xz}^{(3)}$
4	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	0.0001
12	0.9997	1.0000	0.9998	0.9998	0.0072
20	0.9997	1.0007	0.9997	0.9996	0.0379
28	1.0000	1.0034	0.9995	0.9995	0.1274
36	1.0006	1.0228	0.9992	0.9992	0.3356
41	1.0009	- (1)	0.9991	0.9991	0.5649

(1) Não calculado, pois $\bar{w}=0$

(2) Valores de tensão na metade do comprimento da placa

(3) Valores absolutos de σ_{xz} , pois $\bar{\sigma}_{xz}=0$

Tabela 7

Resultados de deslocamentos, rotações e tensões

Observa-se que a relação entre o deslocamento horizontal obtido e o calculado, u/\bar{u} , é crescente, enquanto as relações de deslocamento vertical w/\bar{w} , de rotação $\beta/\bar{\beta}$ e de tensão de membrana $\sigma_x/\bar{\sigma}_x$ são decrescentes. Nota-se também que a tensão de cisalhamento transversal σ_{xz} aumenta em proporção superior ao carregamento. Estes re-

sultados indicam que possivelmente ocorre travamento de cisalhamento, ainda que sua pequena taxa de crescimento e o baixo valor absoluto de σ_{xz} comprovem o bom controle do travamento pelo método empregado. A confirmação da ocorrência do travamento deve ser feita com o uso de malhas de diferentes graus de refinamento.

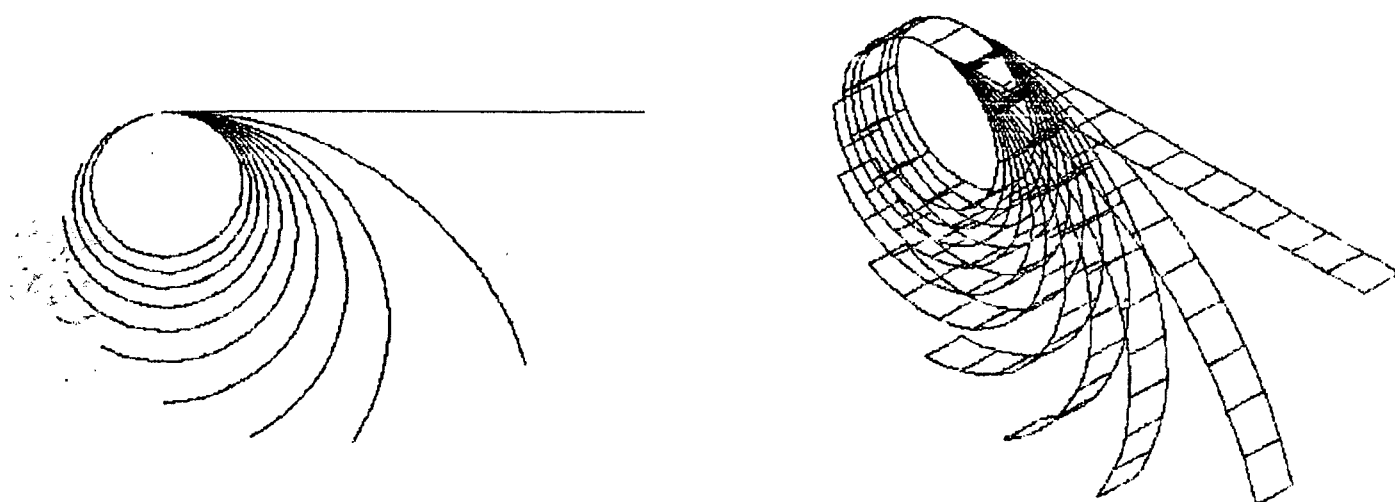
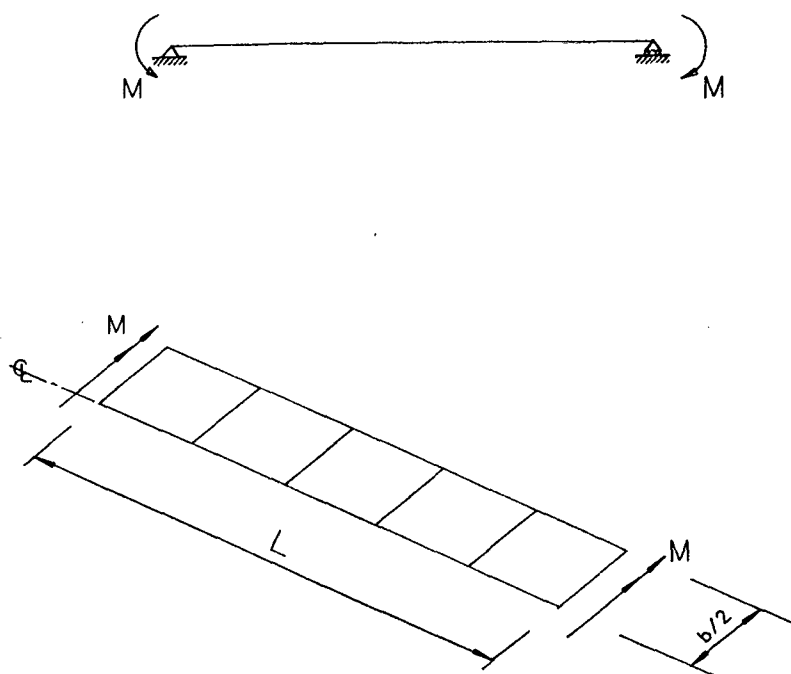


Figura 25

Placa fletida - configurações deformadas intermediárias

5.2.2. Viga simplesmente apoiada com carregamento de flexão

A viga mostrada na Figura 26 é apoiada nas extremidades, sendo o apoio da direita livre na direção horizontal. Devido à simetria, o modelo representa somente a metade do domínio. O carregamento é aplicado em dez passos iguais e os resultados são apresentados no gráfico da Figura 27, comparados com os resultados numéricos obtidos por Surana [4]. Algumas configurações intermediárias são visualizadas na Figura 28.



$$E=10^4$$

$$\nu=0.0$$

$$L=5$$

$$h=0.01095445$$

$$b=0.9128709$$

$$M=1$$

Figura 26
Viga submetida a flexão

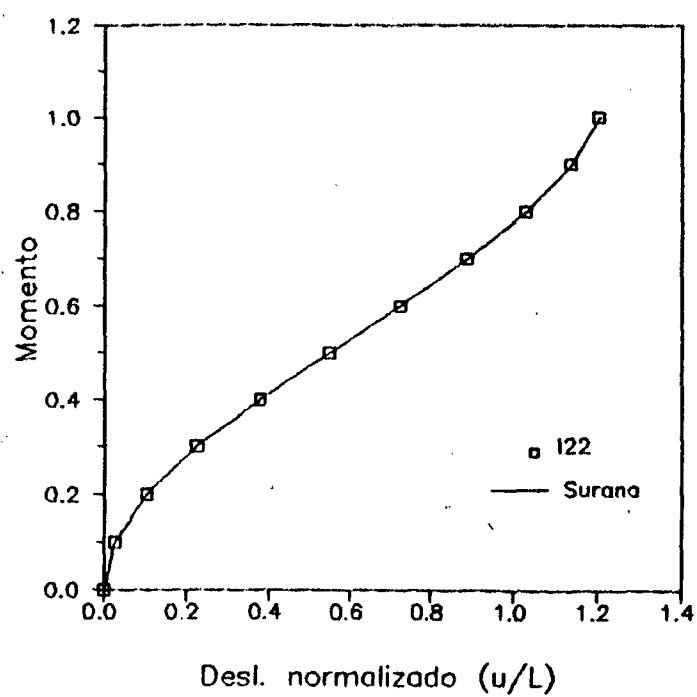


Figura 27
Deslocamento da extremidade

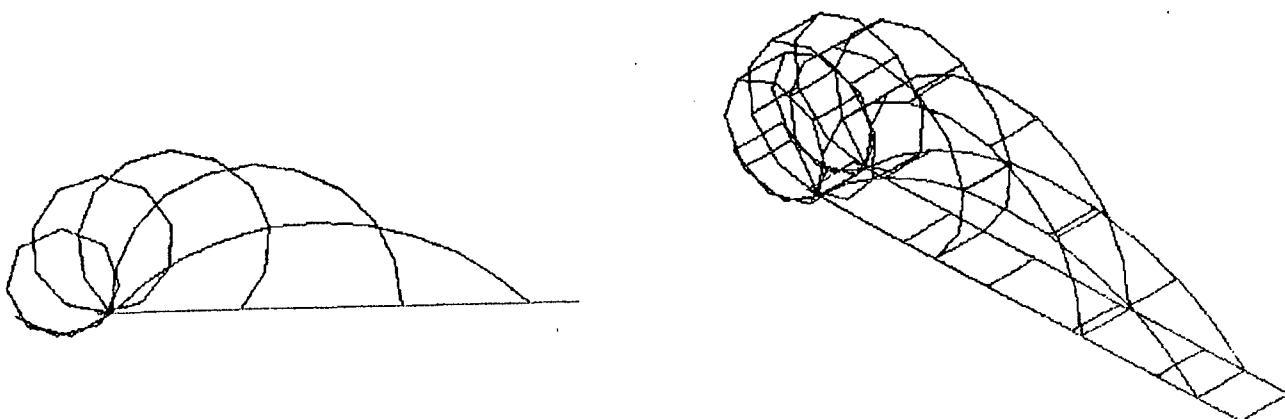


Figura 28

Viga fletida - configurações deformadas intermediárias

A Tabela 8 apresenta os resultados de deslocamento horizontal da extremidade livre, normalizados com relação àqueles obtidos por Surana (u/\bar{u}). Não se faz um estudo comparativo de tensões, uma vez que o autor não apresenta estes dados. São apresentados, contudo, os valores de tensão cisalhante obtidos (σ_{xz}).

Passo	u/\bar{u}	σ_{xz}
2	1.0053	0.0110
4	1.0017	0.2272
6	0.9981	1.4483
8	0.9963	4.6787
10	0.9978	8.7252

Tabela 8

Viga fletida - deslocamentos normalizados

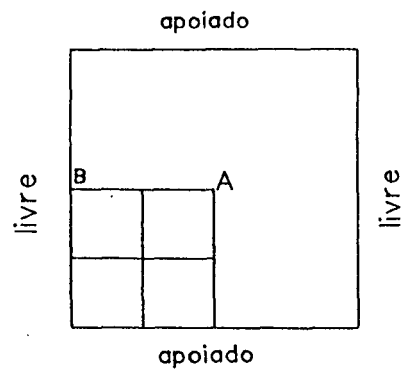
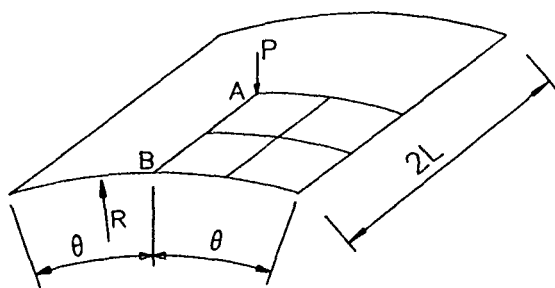
Observa-se que, em termos de deslocamentos, a concordância é muito boa, mesmo para as configurações finais. Porém, o crescimento de σ_{xz} segundo uma taxa superior ao aumento do carregamento aplicado indica o surgimento de travamento de cisalhamento, o que deve ser confirmado através de um estudo de convergência.

5.2.3. Cilindro puncionado

O cilindro mostrado na Figura 29 é submetido a uma carregamento concentrado em sua seção média. Devido às condições de contorno e a sua geometria, ocorrerá "snap-through", fenômeno de ponto limite onde o corpo perde sua estabilidade a um determinado valor de carregamento, passando a apresentar relação carga-deslocamento decrescente até um ponto de mínimo, a partir do qual esta relação se torna novamente crescente.

Para que o modelo possa descrever este comportamento, o carregamento não é aplicado diretamente, mas controlado através da prescrição de deslocamentos. Aplicou-se neste exemplo um deslocamento de 30,0, em doze incrementos iguais, para uma espessura de 12,7, o que caracteriza não linearidade geométrica.

Para análise dos resultados, é computada a reação vertical no ponto A (Figura 29), correspondente ao deslocamento imposto. O gráfico da Figura 30, que mostra a relação das deflexões verticais em A e B com a reação, comparando-a com os resultados obtidos por Surana [4], indica que o modelo descreve com boa precisão o fenômeno de "snap-through". Resultados numéricos da reação em A e deflexão em B, normalizados com relação aos de Surana, são apresentados na Tabela 9, onde w e P são, respectivamente, a deflexão em B e a reação em A obtidos no presente estudo e \bar{w} e \bar{P} os resultados obtidos por Surana. Não são apresentados resultados de tensões na referência consultada.



$$R=2540$$

$$\theta=0.1 \text{ rad}$$

$$L=254$$

$$E=3102.75$$

$$\nu=0.3$$

$$h=12$$

Figura 29
Cilindro puncionado

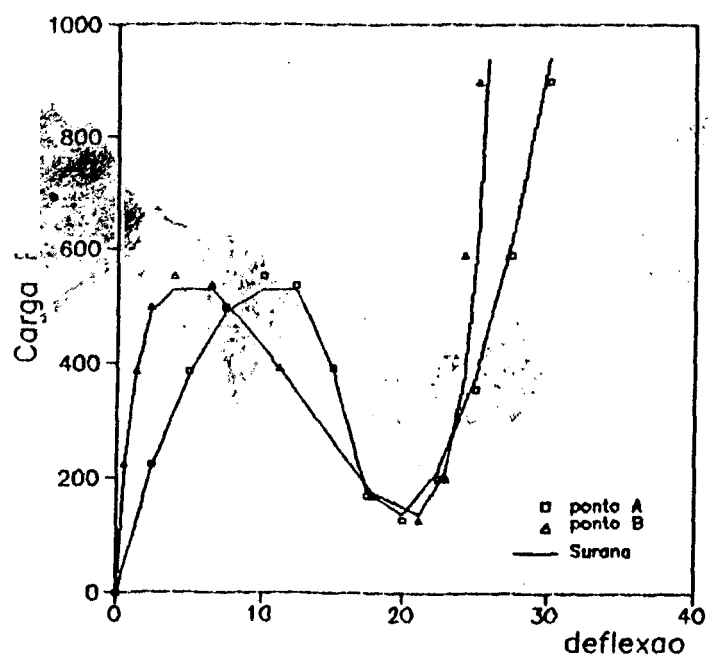


Figura 30
Relação carga resultante x deflexão

Passo	w/\bar{w}	P/\bar{P}
2	1.0055	1.0177
4	0.9968	1.0443
6	0.9933	1.0071
8	0.9995	0.9297
10	1.0003	0.9461
12	1.0010	0.9559

Tabela 9

Cilindro puncionado - resultados normalizados de deflexão e força

Foi feita uma tentativa de se estudar o fenômeno de ponto limite em um modelo similar ao apresentado, porém com espessura de 6,35. De acordo com vários autores [4,5,30], surge, neste caso, o fenômeno do "snap-back", no qual, além da inversão da inclinação da curva carga-deslocamento, ocorre também a mudança de sentido da reação no ponto A. Contudo, esta tentativa não foi bem sucedida, havendo perda da convergência no processo de Newton-Raphson. Recomenda-se, neste caso, o uso de métodos mais sofisticados, como o método do comprimento de arco [35,36].

5.2.4 Flexão não linear de um tubo

Em um tubo longo submetido a flexão, se desenvolvem resultantes de tensão trativas em sua região externa e compressivas na região interna. Estas resultantes têm componentes radiais de sentidos opostos, que provocam a ovalização das seções transversais na porção central do tubo. Como consequência, a resistência do tubo diminui gradativamente com a aplicação do carregamento, até atingir-se um ponto limite, a partir do qual a estrutura perde sua estabilidade.

De acordo com **Emmerling** [34], a tensão máxima no ponto limite é

$$\sigma_m = 0.320 \frac{E h}{r}, \quad (5.7)$$

onde E é o módulo de elasticidade

e h e r são a espessura e o raio do tubo, respectivamente.

Esta flexibilização, por sua vez, resulta em uma curvatura do tubo maior do que aquela esperada pela teoria linear de vigas. Este comportamento não linear é conhecido como efeito Brazier.

Para investigar a capacidade do elemento I22 em descrever o efeito Brazler, foi feito um modelo representando um quarto do tubo (aproveitando as simetrias radial e axial), com uma malha de 16x8 elementos (Figura 31). O momento foi simulado através de carregamento distribuído, nodalizado para os nós da extremidade. A fim de minimizar os efeitos locais na região de aplicação do carregamento (efeito de Saint-Venant), a fileira de elementos da extremidade foi feita muito mais rígida do que as demais. Além disto, devido à grande imprecisão no cálculo das tensões nesta região, estes elementos também foram desconsiderados no cálculo do vetor resíduo.

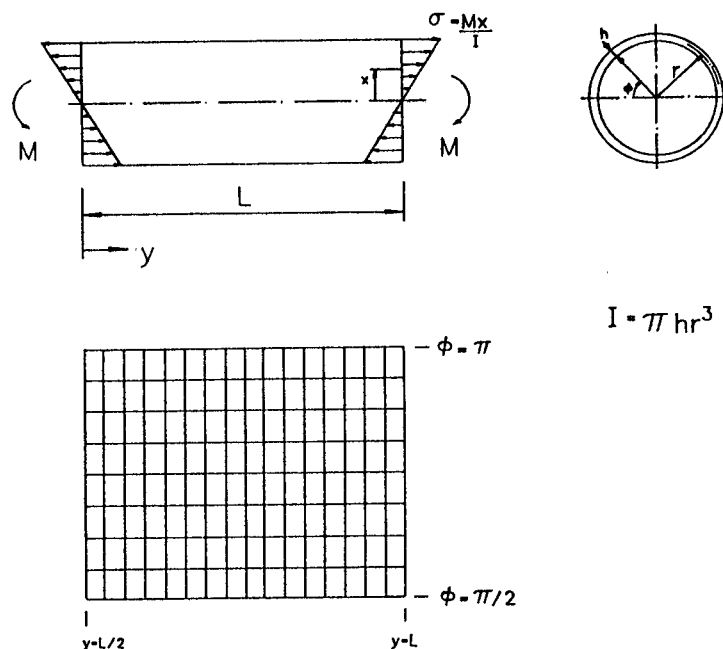


Figura 31

Tubo fletido - Geometria, carregamento e malha

Os parâmetros adotados neste problema são:

módulo de elasticidade: para os elementos da extremidade, $E=2.1 \times 10^8$

para os demais elementos, $E=2.1 \times 10^5$

coeficiente de Poisson: $\nu=0.3$

espessura do tubo: $h=2$

raio médio: $r=20$

comprimento: $L=320$.

O momento aplicado sobre o modelo é 8×10^6 , dividido em 20 passos iguais.

O gráfico da Figura 32 mostra o resultado obtido, na forma de momento adimensional com relação à curvatura adimensional. O momento adimensional é definido por

$$M_o = \frac{M r^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}}{E I h}, \quad (5.8)$$

enquanto a curvatura adimensional é

$$\mu = \frac{r^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}}{R h}. \quad (5.9)$$

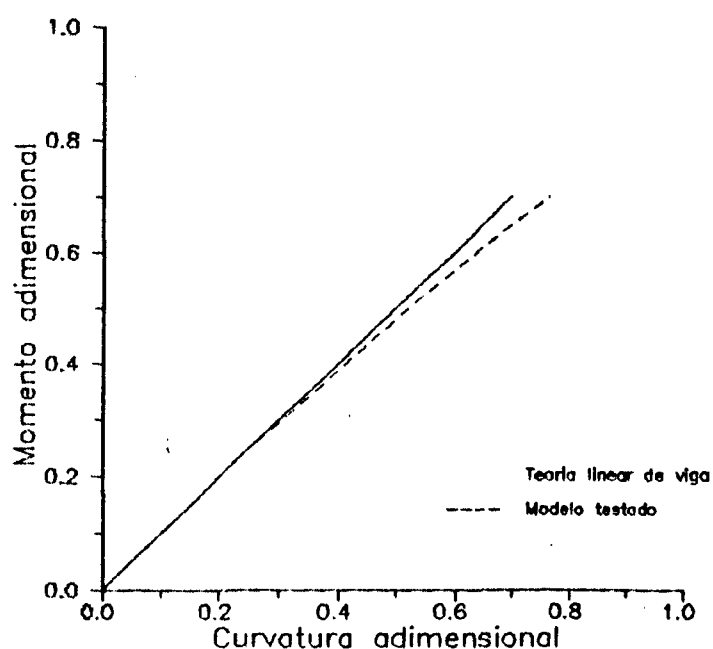


Figura 32

Tubo fletido - relação momento x curvatura

Foram obtidos resultados coerentes até o valor de M_o igual a 0,70 (14º passo), após o qual não houve mais convergência no processo iterativo de Newton-Raphson.

Ainda que não se tenha alcançado o ponto limite com o modelo proposto, a análise do resultado mostra que, na faixa estudada, existe uma relação não linear entre carregamento e curvatura, com flexibilização do tubo devido à ovalização das seções transversais.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo são feitas observações sobre os aspectos considerados mais relevantes do trabalho. São apresentadas as principais conclusões, feitas à luz dos resultados obtidos pelo elemento desenvolvido e, como contribuição ao aprofundamento do trabalho, são apontadas algumas possibilidades de continuidade nos aspectos deficientes ou pouco explorados.

6.1 Conclusões

O objetivo primordial deste trabalho foi desenvolver um elemento de casca baseado no Princípio dos Trabalhos Virtuais para resolver problemas com não linearidade geométrica (grandes deslocamentos e rotações) e se aplicasse a cascas finas e semi-espessas.

Neste sentido, foi implementado um elemento isoparamétrico degenerado biquadrático de 9 nós, com integração de Gauss reduzida e estabilização dos modos de deformação de energia zero. Este elemento recebeu a denominação I22 e o elemento similar, porém com integração completa ($3 \times 3 \times 2$ pontos de Gauss), testado para efeitos de comparação, foi denominado I33.

O elemento estabilizado foi submetido a um "patch test", seqüência de casos de deformação constante em malha plana distorcida, sendo considerado aprovado. Foi também realizado um teste de flexão pura linear em um quarto de cilindro engastado, com malha regular e distorcida, sugerido por White e Abel [31] como um "patch test" de casca, sendo obtidos resultados semelhantes aos citados por estes autores.

Para testar a eficiência do processo de subintegração na eliminação dos travamentos de membrana e de cisalhamento e a eficiência da estabilização na supressão dos modos espúrios decorrentes desta subintegração, submeteu-se o elemento inicialmente a estados de deformação lineares; foram escolhidos casos que se complementassem no que se refere à geometria e ao tipo de solicitação presente.

No exemplo do teto de Scordelis-Lo, casca cilíndrica submetida a carregamento de peso próprio, desenvolvem-se essencialmente tensões de membrana, enquanto no cilindro puncionado diametralmente ocorrem complexos estados de deformações de membrana e cisalhamento. O caso da semi-esfera é útil tanto para verificação do travamen-

lindro puncionado diametralmente ocorrem complexos estados de deformações de membrana e cisalhamento. O caso da semi-esfera é útil tanto para verificação do travamento de membrana quanto da capacidade do elemento em representar corretamente os movimentos de corpo rígido, uma vez que os elementos afastados da região de aplicação das cargas praticamente rotacionam sem se deformarem.

Os resultados destes testes mostram que o elemento I22 apresenta alta taxa de convergência, ao contrário do elemento I33, indicando a eliminação da rigidez excessiva e o controle dos modos espúrios. Cabe observar que não é feita a estabilização dos modos espúrios não-comunicáveis, ou seja, aqueles possíveis somente em malhas de um único elemento.

Foram estudados quatro casos de não linearidade geométrica. O primeiro consistiu de uma placa engastada submetida a flexão pura, o segundo de uma viga apoiada com momento em suas extremidades, o terceiro de um cilindro submetido a um carregamento controlado de maneira que ocorra o "snap-through" e o último do estudo do efeito Brazier em tubo fletido. Em todos estes exemplos os resultados foram muito próximos à solução teórica ou a resultados obtidos por outros pesquisadores.

Os testes realizados mostram, portanto, que o elemento implementado é adequado ao estudo não linear de cascas finas e semi-espessas. Algumas observações, porém, devem ser feitas.

Nas matrizes adicionadas no âmbito do processo de estabilização, são utilizados fatores de ajuste numérico sem embasamento físico. Ainda que em todos os casos testados estes fatores tenham sido tomados igual a um, nada se pode afirmar a priori a respeito de domínios mais complexos. O uso de fatores de ajuste viola um dos critérios sugeridos por Bathe e Dvorkin [32] a serem observados por bons elementos de casca.

Com relação ao procedimento iterativo usado para se alcançar a convergência da solução dentro de cada passo de aplicação de carga, optou-se pelo método de Newton-Raphson padrão, com atualização das matrizes de rigidez a cada iteração. Isto porque nos casos não lineares não se obteve a convergência com o método de Newton-Raphson modificado, onde as matrizes são atualizadas apenas no início do passo. Este comportamento é relatado por Parish [33], o qual ressalta que neste último método a convergência é garantida apenas quando se tem pequenos incrementos de carga. Milford e Schnobrich [7] obtiveram resultados semelhantes.

Outro aspecto de importância na análise não linear, principalmente quando as rotações são grandes, é a estratégia empregada para atualização das normais nodais à superfície média. Vários métodos foram propostos [3-6,18,33], optando-se neste trabalho por aquele adotado por Surana [4]. Milford e Schnobrich [7], analisando o fenômeno do "snap-through" em arco raso e em casca cilíndrica apoiada, compararam as estratégias de atualização linearizadas e não linearizadas, observando não

convergência no método linearizado quando se aplicavam grandes incrementos de carga conjuntamente com o uso do método de Newton-Raphson modificado.

6.2 Recomendações

Algumas sugestões para continuidade do presente trabalho ou para melhoria de certos aspectos do programa computacional desenvolvido são feitas agora.

Para evitar o uso de fatores numéricos de ajuste na obtenção das matrizes de estabilização, outros métodos de eliminação dos modos espúrios podem ser implementados. Entre estes, o uso de funções de interpolação assumidas para deformações, os métodos de decomposição modal ou o uso de outros princípios variacionais que não o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

A extensão da aplicação deste elemento para materiais hiperelásticos é de grande interesse, uma vez que aumenta a cada dia a utilização de polímeros e materiais tipo borracha na indústria. Neste sentido, várias subrotinas do programa HIPERMAT do Grupo de Análise de Tensões do Depto. de Eng. Mecânica da UFSC, desenvolvido para elementos sólidos por Fonseca [29], poderiam ser adaptadas para elementos de casca.

Para melhoria da performance do programa implementado, sugere-se o uso de métodos de solução mais eficientes, que façam uso de processamento vetorial ou paralelo, como o método de gradientes conjugados. Observou-se que, em casos envolvendo maior tempo de processamento, a resolução do sistema de equações consome aproximadamente a metade do tempo total.

A fim de se comprovar a eficiência do elemento desenvolvido, recomenda-se testá-lo em geometrias mais complexas. Nestes casos se teria também uma melhor avaliação da influência dos fatores numéricos de estabilização no comportamento do elemento.

ANEXO

METODOLOGIA DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES

Conforme apresentado no Capítulo 2, problemas não lineares podem ser resolvidos através de sucessivas etapas intermediárias, onde em cada uma a configuração de equilíbrio é determinada recursivamente através de uma análise de convergência.

Neste anexo apresenta-se a metodologia de solução empregada neste trabalho, mostrando-se, de forma seqüencial, os passos necessários à obtenção dos parâmetros de interesse.

O fluxograma do programa computacional implementado é apresentado em seguida.

A-1 Descrição geral da metodologia

1ª etapa. Entrada de dados do modelo

Nesta etapa é estabelecida a geometria do domínio, malha, propriedades do material e condições de contorno de deslocamento e força.

2ª etapa. Imposição do carregamento

No método de Newton-Raphson, o carregamento é imposto por passos⁽¹⁾. São admitidas cargas nodais concentradas, carregamento de superfície e forças de corpo.

3ª etapa. Montagem das matrizes de rigidez

As matrizes de rigidez linear e geométrica são recalculadas a cada iteração no processo de Newton-Raphson padrão, conforme Equações 3.16 e 3.19. Para superposição, as matrizes de rigidez elementares são transformadas para o sistema de coordenadas globais.

4ª etapa. Montagem da matriz de estabilização

O método de controle de modos espúrios empregado envolve a construção de uma matriz de estabilização (Equação 4.17), cujos elementos são obtidos a partir de um operador matemático adequado. Esta matriz é atualizada a cada iteração e adicionada

(1) Cada etapa de aplicação de uma nova parcela do carregamento é denominada passo e cada etapa, dentro de um mesmo passo, para busca da convergência é denominada iteração.

às matrizes de rigidez, conforme mostrado na Equação 4.18.

5ª etapa. Obtenção dos deslocamentos nodais incrementais e das reações de apoio

Nesta etapa, a equação de equilíbrio incremental discretizada referente à configuração $\Omega^{(2)}$, iteração i ,

$$\left({}^2\mathbf{K}_L^{(i-1)} + {}^2\mathbf{K}_G^{(i-1)} \right) \Delta \mathbf{d}^{(i)} = {}^2\mathbf{R} - {}^2\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (\text{A-1})$$

é resolvida para $\Delta \mathbf{d}^{(i)}$. As matrizes de rigidez são armazenadas em banda e o sistema de equações resolvido pelo método da eliminação de Gauss.

A cada iteração, são obtidos os incrementos das reações de apoio, da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{P}^i = \left({}^2\mathbf{K}_L^{(i-1)} + {}^2\mathbf{K}_G^{(i-1)} \right) \Delta \mathbf{d}^i. \quad (\text{A-2})$$

A reação de apoio total equivale à soma dos incrementos até a iteração presente:

$$\mathbf{P}^i = \mathbf{P}^{i-1} + \Delta \mathbf{P}^i \quad (\text{A-3})$$

6ª etapa. Atualização de parâmetros

Uma vez determinados os deslocamentos nodais da iteração presente, são atualizadas as coordenadas e vetores normais nodais, bem como os deslocamentos nodais acumulados.

7ª etapa. Cálculo das deformações e tensões

As deformações incrementais lineares de Green-Lagrange no estado $\Omega^{(2)}$, iteração i , são determinadas através de

$$\Delta \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (\text{A-4})$$

onde o tensor gradiente de deformação é

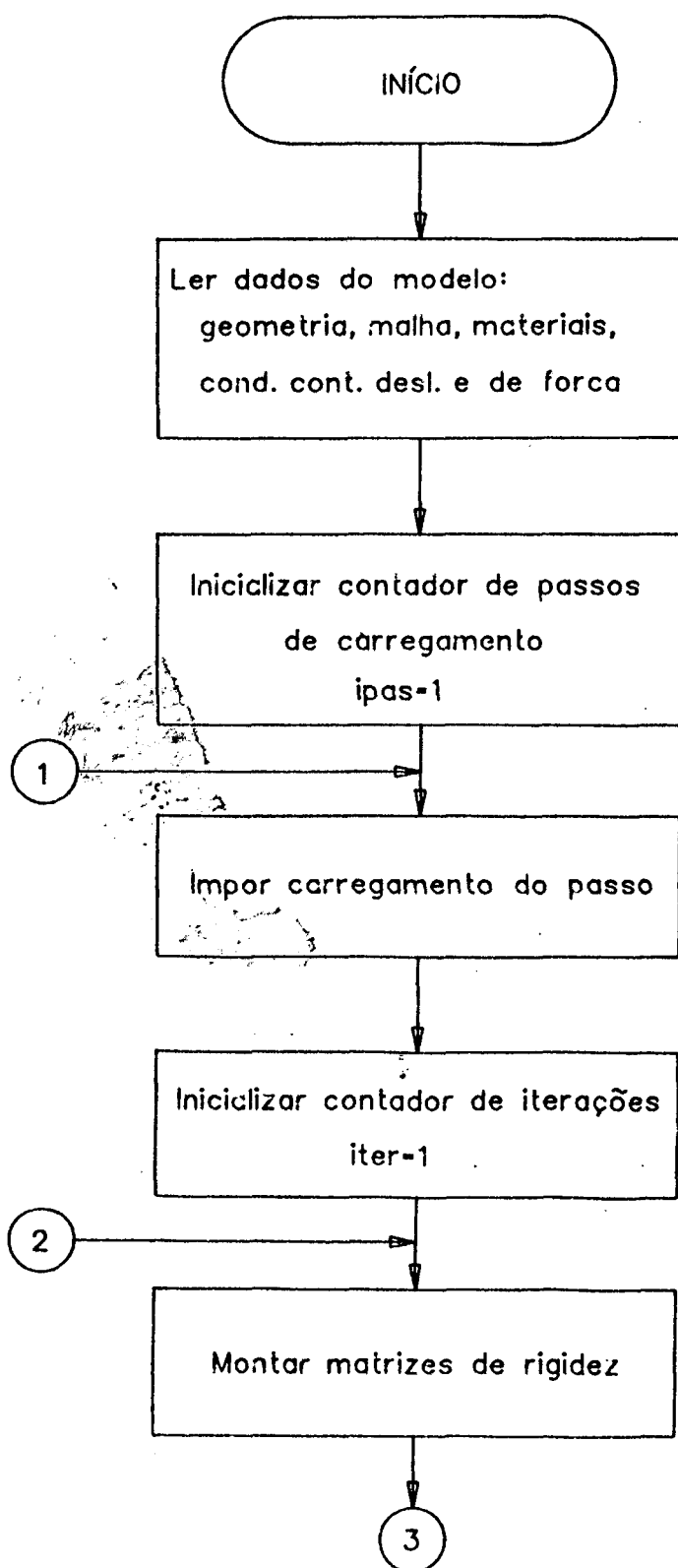
$$F_{ij} = \frac{\partial {}^2x_i^{(i)}}{\partial {}^1x_j} \quad (\text{A-5})$$

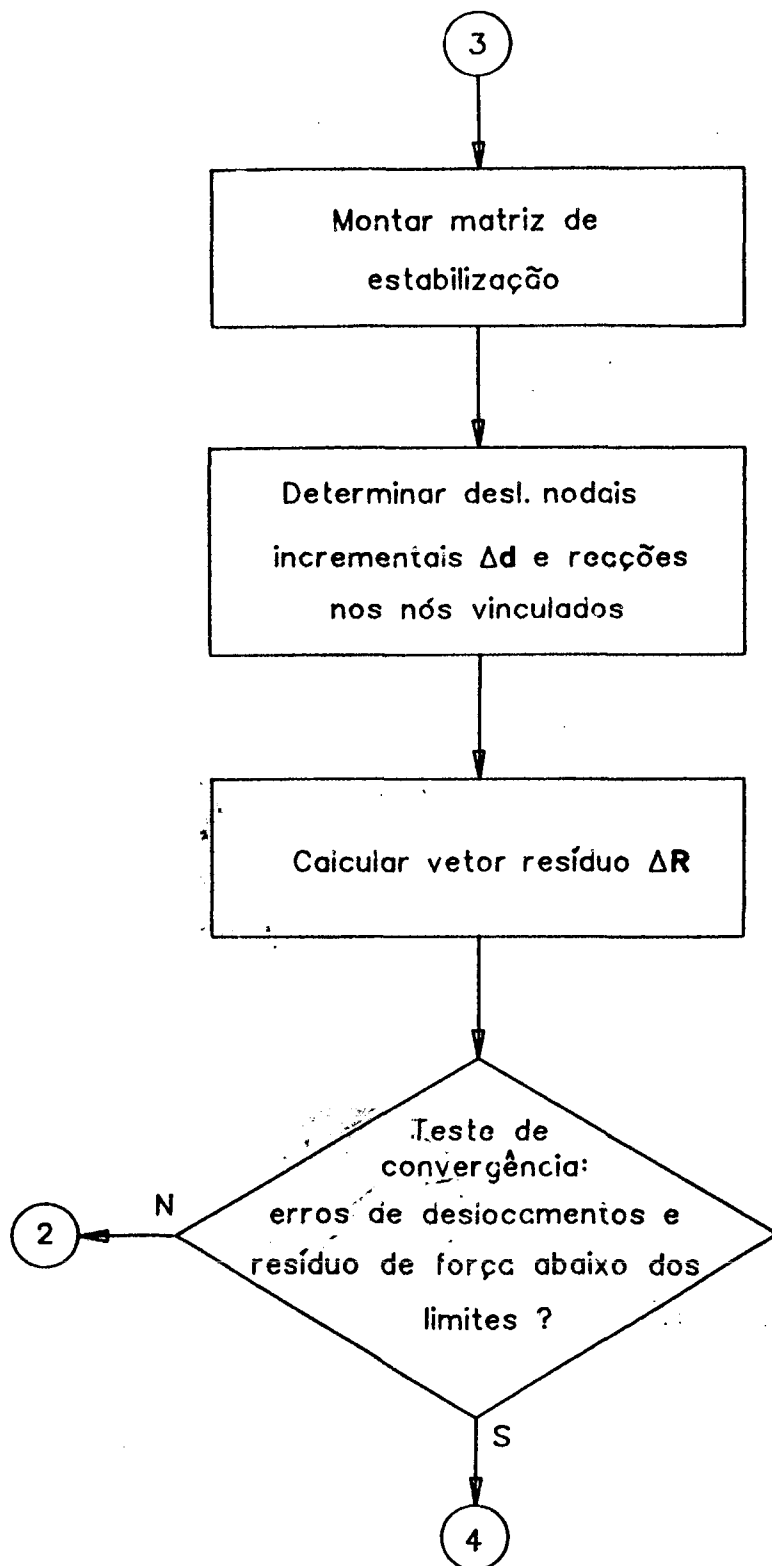
e \mathbf{I} é a matriz identidade.

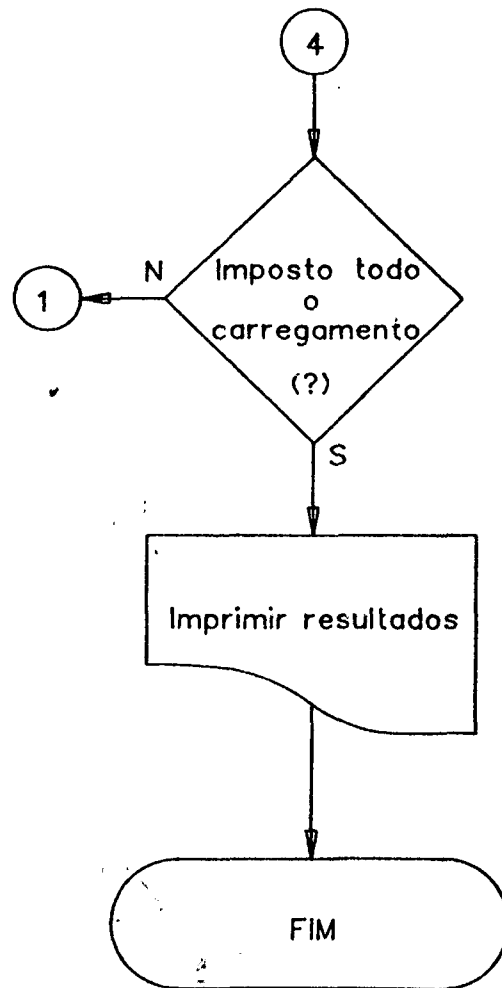
Através da relação constitutiva linearizada

$${}^2\Delta \mathbf{S} = \mathbf{D} \Delta \mathbf{e}, \quad (\text{A-6})$$

A-2 Fluxograma do programa implementado







BIBLIOGRAFIA

- 1 AHMAD, S. et al. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2: 419-51, 1970.
- 2 ZIENKIEWICZ, O. G. et al. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 3: 275-90, 1971.
- 3 BATHE, K.-J. & BOLOURCHI, S. A geometric and material nonlinear plate and shell element. *Comp. & Struct.*, 11: 23-48, 1980.
- 4 SURANA, K. S. Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 19: 581-615, 1983.
- 5 OLIVER, J. & OÑATE, E. A total lagrangian formulation for the geometrically nonlinear analysis of structures using finite elements. Part I. Two-dimensional problems: shell and plate structures. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 20: 2253-81, 1984.
- 6 HSIAO, K.-M. & CHEN, Y.-R. Nonlinear analysis of shell structures by degenerated isoparametric shell element. *Comp. & Struct.* 31, n. 3: 427-38, 1989.
- 7 MILFORD, R. V. & SCHNOBRICH, W. C. Degenerated isoparametric finite elements using explicit integration. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23: 133-54, 1986.
- 8 BICANIC, N. & HINTON, E. Spurious modes in two-dimensional isoparametric elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 14: 1545-57, 1979.
- 9 BELYTSCHKO, T. et al. Hourglass control in linear and nonlinear problems. In: *Recent Developments in Linear and Nonlinear Finite Element Methods*, EUA, ASME. 1983. p. 37-63.
- 10 BELYTSCHKO, T. et al. Implementation and application of a 9-node lagrange shell element with spurious mode control. *Comp. & Struct.*, 20, n. 1-3: 121-8, 1985.
- 11 BELYTSCHKO, T. et al. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 51: 221-58, 1985.

- 12 HUANG, H. C. & HINTON, E. A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 22: 73-93, 1986.
- 13 BELYTSCHKO, T. et al. Assumed strain stabilization procedure for the 9-node lagrange shell element. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 28: 385-414, 1989.
- 14 VERHEGGE, B. & POWELL, G.H. Control of zero-energy modes in 9-node plane element. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23: 863-9, 1986.
- 15 BRIASSOULIS, D. The zero energy modes problem of the nine-node lagrangian degenerated shell element. *Comp. & Struct.*, 30, n. 6: 1389-402, 1988.
- 16 WHITE, D. W. & ABEL, J. F. Accurate and efficient nonlinear formulation of a nine-node shell element with spurious mode control. *Comp. & Struct.*, 35, n. 6: 621-41, 1990.
- 17 TIMOSHENKO, S. P. & WOINOWSKI-KRIEGER, S. *Theory of Plates and Shells*. 2. ed., Singapore, McGraw-Hill Book Co., 1970. xiv + 580 p.
- 18 RAMM, E. A plate/shell element for large deflections and rotations. In: *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis: U.S.-Germany Symposium*. EUA, Massachusetts Institute of Technology, 1976.
- 19 COOK, R. D. Concepts and applications of finite element analysis. 2. ed., EUA, John Wiley & Sons, 1981. xix + 532 p.
- 20 LEE, S. W. & PIAN, T. H. H. Improvements of plate and shell finite elements by mixed formulations, *AIAA*, 16, n. 1: 29-34, 1978.
- 21 NOOR, A. K. & PETERS, J. M. Mixed models and reduced/selective integration displacements models for nonlinear analysis of curved beams. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 17: 615-31, 1981.
- 22 BELYTSCHKO, T. et al. A C^0 triangular plate element with one-point quadrature. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 20: 787-802, 1984.
- 23 HUGHES, T. J. R. & TEZDUYAR, T. E. Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node isoparametric element. *J. Appl. Mech.*, 48. 587-96, 1981.

- 24 STOLARSKI, H. & BELYTSCHKO, T. On equivalence of mode decomposition and mixed finite elements based on the Hellinger-Reissner principle. Part I: Theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 58: 249-65, 1986.
- 25 LOVE, A. E. H. On the small free vibrations and deformations of thin elastic shell. *Phil. Trans. Roy. Soc., Londres*, 17A, p. 491-546, 1888.
- 26 LOVE, A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4. ed., EUA. Dover Publications, 1944.
- 27 MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 18: 31-38, 1951.
- 28 FONSECA, J. S. O. Uma formulação de elementos finitos sólidos para problemas com não-linearidades geométrica e material. Dissertação de mestrado, UFSC. 1990.
- 29 KANOKNUKULCHAI, W. A simple and efficient finite element for general shell analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 14: 179-200, 1979.
- 30 WHITE, D. W. & ABEL, J. F. Testing of shell finite element accuracy and robustness. *Finite Elements in Analysis and Design*, 6: 129-51, 1989.
- 31 BATHE, K.-J. & DVORKIN, E. N. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 21: 367-83, 1985.
- 32 SCORDELIS, A. C. & LO, K. S. Computer analysis of cylindrical shells. *J. Amer. Concr. Inst.*, 61: 539-61, 1969.
- 33 MACNEAL, R. H. & HARDER, R. L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite element in analysis and design*, 1: 3-20, 1985.
- 34 EMMERLING, F. A. Nonlinear bending of curved tubes. In: *Flexible shells. Theory and Applications*. Alemanha, Springer. 1984, p. 175-92.
- 35 CRISFIELD, M. A. An arc-length method including line searches and accelerations. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 19: 1269-89, 1983.
- 36 RIKS, E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability.

J. Appl. Mech., 39: 1060-6, 1972.